

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Física Atómica Molecular y Nuclear**



**ESTRUCTURA MULTIFRACTAL Y APLICACIONES  
DE LAS FLUCTUACIONES EN CASCADAS  
ATMOSFÉRICAS PRODUCIDAS POR RAYOS  
CÓSMICOS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

**Eduardo Faleiro Usanos**

Bajo la dirección del doctor

José María Gómez y Gómez

**Madrid, 2003**

**ISBN: 978-84-669-1571-7**

**©Eduardo Faleiro Usanos, 1998**



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5314279410

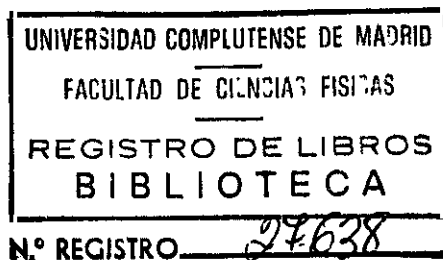
TI-1998/22

# ESTRUCTURA MULTIFRACTAL Y APLICACIONES DE LAS FLUCTUACIONES EN CASCADAS ATMOSFÉRICAS PRODUCIDAS POR RAYOS CÓSMICOS

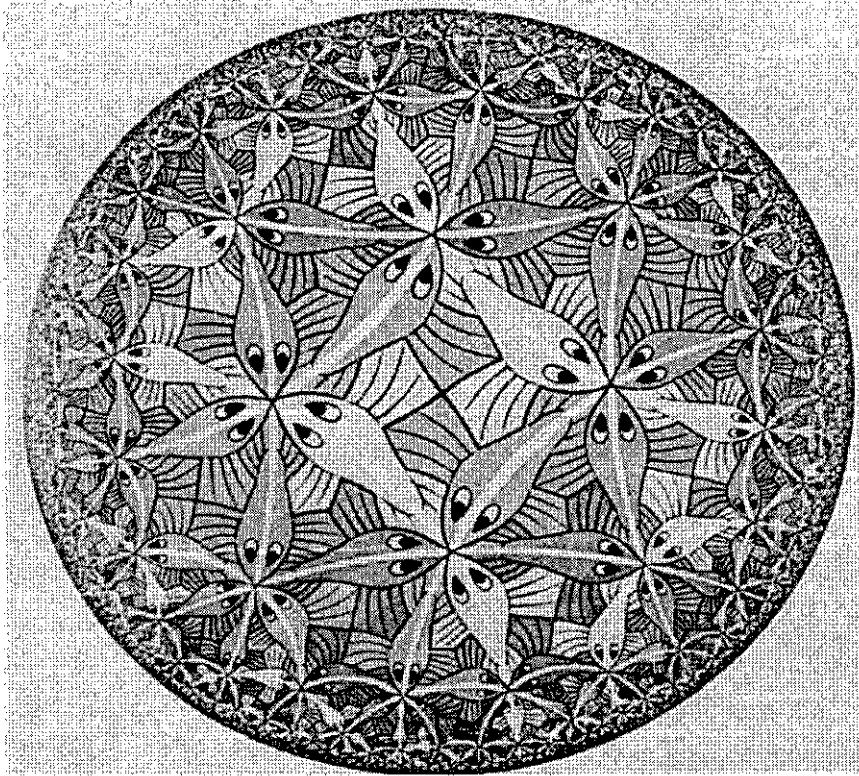
*Memoria presentada por*  
**D. Eduardo Faleiro Usanos**  
*para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas*  
*por la Universidad Complutense de Madrid*

*Dirigida por el profesor*  
**D. José María Gómez y Gómez**

Septiembre 1998



*A Victoria*



M.C. Escher. Circulo Limite III. 1959



# Agradecimientos

Es ésta una cuestión gratificante y a la vez espinosa. Es grata pues el llegar a ella supone la conclusión de un trabajo que empenó a su autor durante largo tiempo con no pocos esfuerzos y amarguras, a la vez que un prolongado aprendizaje no sólo científico sino también humano, por los innumerables apoyos y buenos consejos recibidos de muchos. Es espinosa, pues cualquier olvido involuntario produciría gran desazón en el autor. Si esto se produjera, siéntase el interesado en mi mente y corazón, como si en estas líneas viera su nombre.

Son muchas personas de diversa condición las destinatarias de mi agradecimiento. Científicamente hablando, quiero agradecer en primer lugar al Prof. José María Gómez la confianza que depositó en mí al inicio de nuestra relación y la crítica, la orientación y el apoyo incondicional que me ha mostrado durante el tiempo que ha durado este trabajo, gratificación que extendiendo al Prof. V. Manfredi, de la universidad de Padua, pues fue quien facilitó mis primeros contactos con los fractales. Agradezco igualmente al grupo de Madrid de la HEGRA Collaboration, liderado por V. Fonseca y del cual soy miembro, por la puesta a mi disposición de todos sus recursos materiales para que esta memoria sea pública. Mención especial debo hacer de su capital humano, del que cualquier conocedor del mismo puede sentirse más que orgulloso. Desde sus *seniors* hasta el más reciente becario, todos han facilitado mi tarea con sus sugerencias. Agradezco a los miembros del grupo GRAAL, con el Prof. F. Arqueros a la cabeza, sus acertados comentarios sobre física de rayos cósmicos. Debo nombrar, también, al grupo de Física de Plasmas, con cuyos miembros he mantenido muchas y muy fructíferas discusiones sobre estadística. Y por supuesto a la sección del INFN de Pavía, encabezada por el Prof. S.P. Ratti, con cuyos integrantes he hablado mucho sobre fractales y multifractales aplicados a la física. Por último, no puedo olvidarme del Dr. Francois Schmitt, del Institut Royal de Meteorologie de Bruselas. Nuestro ingente intercambio de *e-mail* ha sido vital para este trabajo.

Si, científicamente, he recibido innumerables apoyos, no es menos cierto

que humanamente me he sentido, asimismo, arropado en todo momento. Quiero darle desde aquí las gracias a Victoria, mi esposa, por su infinita paciencia y por soportar tantas horas en solitario. Su buen criterio me ha ayudado también a mejorar el estilo de esta memoria. Gracias de nuevo a todos los anteriormente mencionados, pues, además de ayudarme en el trabajo científico, me inyectaban el ánimo necesario para seguir adelante. Y en particular al Dr. Gabriele Gianini y al Dr. Gianfausto Salvadori, con quienes degustando los generosos caldos del norte de Italia aprendí que los fractales están en todos lados. Gracias a todos, pues todos en alguna medida son responsables de que estas líneas sean escritas.

# Índice general

Dedicatoria	i
Agradecimientos	iii
Índice general	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xvii
Introducción	1
<b>1 Fractales y multifractales</b>	<b>5</b>
1.1 Orígenes de la geometría fractal . . . . .	6
1.2 Fractales deterministas . . . . .	12
1.2.1 Fractales regulares . . . . .	13
1.2.2 Funciones fractales . . . . .	17
1.3 Medidas multifractales deterministas . . . . .	18
1.3.1 Espectro multifractal . . . . .	20
1.3.2 Análisis de la multifractalidad . . . . .	22
1.3.3 Estimación práctica del espectro multifractal . . . . .	24
1.3.4 Modelos multifractales deterministas . . . . .	25
1.4 Fractales estocásticos . . . . .	26
1.4.1 Procesos estocásticos fractales . . . . .	28
1.4.2 Técnicas de análisis . . . . .	37
1.4.3 Simulación de procesos aditivos . . . . .	40
1.5 Medidas multifractales estocásticas . . . . .	41
1.5.1 Invariancia de escala de las medidas . . . . .	42
1.5.2 Caracterización de la intermitencia . . . . .	44
1.5.3 Medidas no estacionarias . . . . .	45
1.5.4 Modelos multifractales estocásticos . . . . .	47
1.5.5 Multifractales universales . . . . .	53

1.5.6	Técnicas de análisis: la técnica DTM . . . . .	55
<b>2</b>	<b>Radiación cósmica</b>	<b>59</b>
2.1	Naturaleza y características de la radiación cósmica . . . . .	60
2.1.1	Espectro de energía . . . . .	60
2.1.2	Composición química . . . . .	62
2.2	Cascadas atmosféricas electromagnéticas . . . . .	65
2.3	Cascadas atmosféricas hadrónicas . . . . .	67
2.4	Muones en cascadas atmosféricas . . . . .	69
2.5	Radiación Cerenkov en las cascadas . . . . .	71
2.6	Simulación por Monte Carlo de EAS . . . . .	73
2.6.1	Interacciones electromagnéticas . . . . .	74
2.6.2	Interacciones hadrónicas . . . . .	74
2.6.3	Luz Cerenkov . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Estructura de las fluctuaciones angulares</b>	<b>77</b>
3.1	Representación unidimensional de los sucesos simulados . . . . .	80
3.2	Librería de sucesos simulados . . . . .	83
3.3	Análisis de la librería . . . . .	86
3.3.1	Clasificación por energía: análisis lejano . . . . .	88
3.3.2	Clasificación por energía: análisis cercano . . . . .	100
3.3.3	Clasificación por $N_s$ : análisis lejano . . . . .	104
3.3.4	Clasificación por $N_s$ : análisis cercano . . . . .	107
3.4	Resumen de resultados . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Análisis del ruido <math>1/f</math> residual</b>	<b>115</b>
4.1	Función de escalado de los momentos estadísticos . . . . .	116
4.1.1	Función $K(q)$ en el análisis lejano . . . . .	117
4.1.2	Función $K(q)$ en el análisis cercano . . . . .	128
4.2	Estimación de $\alpha$ y $C_1$ por la técnica DTM . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Método de separación <math>\gamma</math>/protón</b>	<b>139</b>
5.1	Parámetro $\chi_r^2$ y factor de calidad $Q$ . . . . .	140
5.2	La mejor separación $\gamma$ /protón . . . . .	143
5.3	El método más sencillo: el filtro global . . . . .	147
5.3.1	Filtro global universal . . . . .	148
5.3.2	Filtro global de protones . . . . .	149
5.3.3	Filtro global de fotones . . . . .	150
5.3.4	Resumen de valores de corte y factores de calidad . . . . .	151
5.4	Dependencia de la escala . . . . .	152

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>vii</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>155</b>
<b>Apéndices</b>	<b>157</b>
<b>A Probabilidad y procesos multiplicativos</b>	<b>157</b>
A.1 Algunas definiciones previas . . . . .	157
A.2 Funciones características . . . . .	157
A.3 Distribuciones gaussianas . . . . .	158
A.4 Distribuciones infinitamente divisibles . . . . .	159
A.5 Distribuciones estables de Levy . . . . .	159
A.6 Multifractalidad y distribuciones de Levy . . . . .	160
<b>B Simulación de multifractales universales</b>	<b>161</b>
B.1 Simulación de cascadas discretas . . . . .	161
B.2 Simulación de cascadas continuas . . . . .	162
<b>C Procesos estocásticos</b>	<b>165</b>
C.1 PSD de procesos compuestos y sus propiedades. . . . .	165
C.2 Diferencias entre el filtrado ordinario y el filtrado intrínseco de procesos estocásticos . . . . .	166
<b>Bibliografía</b>	<b>171</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>181</b>
<b>Índice de materias</b>	<b>183</b>



# Índice de figuras

1.1	<i>Curva de Von Koch regular y detalle de la misma.</i>	6
1.2	<i>Triángulo de Sierpinsky.</i>	7
1.3	<i>Determinación de la dimensión de recuento por cajas, <math>D_b</math>, del perfil costero de Islandia. Se representan tres escalas de medida <math>r</math> y el correspondiente número de cajas necesario para recubrir el objeto.</i>	11
1.4	<i>Representación en escala logarítmica de la relación entre <math>N</math> y <math>r</math> para la determinación de la dimensión <math>D_b</math> del perfil costero de Islandia. El ajuste a (1.11), con <math>\delta \equiv r</math>, nos va proporcionar el valor de dicha dimensión.</i>	12
1.5	<i>Generación de la curva regular de Von Koch. El segmento recto superior representa el iniciador, <math>n = 0</math>, del proceso iterativo. Para las sucesivas etapas se aplica el generador a todos los segmentos rectos que presenta la figura (ver texto).</i>	13
1.6	<i>Generación del triángulo de Sierpinsky.</i>	14
1.7	<i>Dimensión de autosemejanza <math>D_s</math> de tres de los conjuntos fractales clásicos. En la tabla adjunta se consignan la dimensión topológica <math>D_t</math>, la razón de contractividad <math>r</math> y el número de objetos similares al todo tras una operación de contracción <math>N</math>.</i>	16
1.8	<i>Generación del triángulo de Sierpinsky mediante el sistema IFS aplicado a dos generadores distintos: un cuadrado y un triángulo.</i>	17
1.9	<i>Representación de la función de Wierstrass en el intervalo <math>[0, 1]</math> para <math>s = 1.5</math> y <math>\lambda = 0.4</math>.</i>	18
1.10	<i>Medida multifractal que representa la disipación de energía para una señal turbulenta.</i>	19
1.11	<i>Espectro de singularidades <math>f(\alpha)</math> para la medida de la figura 1.10.</i>	21
1.12	<i>Dimensión de Renyi para un conjunto multifractal de Cantor (de [1]).</i>	23
1.13	<i>Medida multifractal generada con el modelo <math>p</math>-binomial con <math>p = 0.3</math> para <math>n = 8</math> pasos.</i>	25
1.14	<i>Comparación entre el espectro de singularidades de la medida binomial para <math>n = 16</math> con el espectro teórico.</i>	27

1.15	<i>Construcción de la isla de Koch regular y de su homóloga estocástica.</i>	28
1.16	<i>Algunos ejemplos de ruidos.</i>	30
1.17	<i>(A) Trayectoria en el plano de una partícula browniana a una cierta resolución. (B) Tramo A-B ampliado considerando una resolución aún mayor.</i>	31
1.18	<i>(a) Variable aleatoria Normal. (b) Desplazamiento de la partícula browniana con arreglo a (1.36).</i>	33
1.19	<i>Representación conjunta de varias realizaciones de un movimiento browniano unidimensional mostrando las propiedades reflejadas en (1.43).</i>	34
1.20	<i>Tres muestras de movimientos brownianos fraccionales con <math>H = 0.33</math>, <math>H = 0.5</math> y <math>H = 0.75</math>.</i>	36
1.21	<i>Exponente de escalado de las funciones de estructura para el movimiento browniano (300 realizaciones) mostrando la linealidad de <math>\zeta(q)</math> con <math>H \equiv 0.5</math>.</i>	39
1.22	<i>Una realización de un vuelo de Levy.</i>	40
1.23	<i>Varias etapas en la construcción de una cascada multiplicativa según el modelo <math>\alpha</math>.</i>	49
1.24	<i>Desarrollo de una cascada multiplicativa según una distribución log-normal (<math>\alpha = 2.0</math>), con <math>C_1 = 0.115</math>, siendo 3 la relación entre escalas sucesivas. Se muestra, asimismo, el valor más probable <math>\epsilon_{MP}</math> de las medidas y el valor <math>\epsilon_1</math> correspondiente a la singularidad media.</i>	56
1.25	<i>Representación de la función de escalado de momentos, <math>K(q)</math>, y la función de codimensión, <math>C(\gamma)</math>, para diversos valores del índice de Levy, <math>\alpha</math>.</i>	57
2.1	<i>Espectro diferencial de todos los rayos cósmicos medido por detectores en tierra (de [53]).</i>	61
2.2	<i>Profundidad del máximo de la cascada frente a energía primaria de acuerdo con [70] y [71], donde se detallan los símbolos correspondientes a los artículos.</i>	64
2.3	<i>Desarrollo longitudinal de una cascada puramente electromagnética. Las líneas diagonales etiquetadas de 0.4 a 1.2 indican posiciones de edad constante. Los números del 6 al 24 junto a cada curva corresponden al <math>\ln E_0/E_c</math>.</i>	66
2.4	<i>Diagrama esquematizado del desarrollo de una cascada hadrónica en la atmósfera (de [77]).</i>	68



2.5	<i>Comparación de las distribuciones laterales de muones y electrones. El trazo continuo representa la densidad de electrones. El discontinuo representa la de muones multiplicada por un factor <math>10^3</math> (de [75]).</i>	70
2.6	<i>a) Emisión Cerenkov de una cascada a varias alturas, mostrando el cambio en el ángulo de emisión con el índice de refracción; b) Densidad de luz resultante en ausencia de scattering múltiple; c) Densidad de luz asumiendo un scattering realista (de [75]).</i>	71
3.1	<i>Partículas secundarias en el plano de observación para un área de <math>4.10^4 m^2</math> con el core situado en el centro geométrico. Las imágenes corresponden a dos protones y dos fotones primarios de 10 TeV de energía.</i>	79
3.2	<i>Región del plano de observación donde se sitúan los sectores en análisis lejano sobre los que se realiza la medida del número de partículas. Por simplicidad, sólo se representa hasta 64 sectores.</i>	80
3.3	<i>Densidad de partículas para dos sucesos de distinto tipo y similar número medio de partículas recogidas en la corona.</i>	81
3.4	<i>Desviaciones respecto del valor medio en la corona para diversos tipos de primarios.</i>	82
3.5	<i>Efectos geométricos derivados de la inclinación del eje de la cascada.</i>	85
3.6	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>protones</b> primarios de la librería clasificada por <b>energía</b>. Se aprecia en ellas el comportamiento asintótico indicado en el texto para los límites <math>k \rightarrow 0</math> y <math>k \rightarrow \infty</math>.</i>	90
3.7	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>fotones</b> primarios de la librería clasificada por <b>energía</b>. Se aprecia en ellas el comportamiento asintótico indicado en el texto para los límites <math>k \rightarrow 0</math> y <math>k \rightarrow \infty</math>.</i>	91
3.8	<i>Ajuste del espectro medio de las muestras de <b>protones</b> de 40 TeV a la función (3.12) En los detalles inferiores se muestra, asimismo, el ajuste a (3.13) en línea de trazos poniendo de manifiesto el comportamiento crítico respecto al parámetro <math>B</math>.</i>	94
3.9	<i>Ajuste del espectro medio de las muestras de <b>fotones</b> de 10 TeV a la función (3.12) En los detalles inferiores se muestra, asimismo, el ajuste a (3.13) en línea de trazos poniendo de manifiesto el comportamiento crítico respecto al parámetro <math>B</math>.</i>	95
3.10	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>protones</b> primarios de la librería cuando se filtra mediante (3.14).</i>	96
3.11	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>fotones</b> primarios de la librería cuando se filtra mediante (3.14).</i>	97

3.12	<i>Efecto sobre un protón y un fotón de 60 TeV del filtrado mediante (3.14).</i> . . . . .	99
3.13	<i>Representación de la PSD para protones de 30 TeV cuando la posición del core para cada suceso individual se toma: en su posición real (figura superior), en una posición desplazada al punto (150cm,150cm) (figura central) y en una posición aleatoria con distribución uniforme dentro del círculo de radio 150cm.</i> . . . . .	101
3.14	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>protones</b> primarios de la librería en análisis cercano.</i> . . . . .	102
3.15	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>fotones</b> primarios de la librería en análisis cercano.</i> . . . . .	103
3.16	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>protones</b> primarios de la librería, en análisis cercano, cuando se filtran mediante (3.18).</i> . . . . .	105
3.17	<i>Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de <b>fotones</b> primarios de la librería, en análisis cercano, cuando se filtran mediante (3.18).</i> . . . . .	106
3.18	<i>Representación logarítmica de la PSD para las muestras de <b>protones</b> primarios <math>N_1</math> y <math>N_2</math> de la librería clasificada por número de secundarias.</i> . . . . .	108
3.19	<i>Representación logarítmica de la PSD para las muestras de <b>fotones</b> primarios <math>N_1</math> y <math>N_2</math> de la librería clasificada por número de secundarias.</i> . . . . .	109
3.20	<i>Representación logarítmica de la PSD para las muestras de <b>protones</b> primarios <math>N_1</math> y <math>N_2</math> de la librería clasificada por número de secundarias cuando se filtra mediante (3.14).</i> . . . . .	110
3.21	<i>Representación logarítmica de la PSD para las muestras de <b>fotones</b> primarios <math>N_1</math> y <math>N_2</math> de la librería clasificada por número de secundarias cuando se filtra mediante (3.14).</i> . . . . .	111
4.1	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>protones</b> clasificados por <b>energía</b> en el análisis lejano. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM (4.2).</i>	119
4.2	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>fotones</b> clasificados por <b>energía</b> en el análisis lejano. Al igual que en la figura 4.1, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.</i> . . . . .	120

4.3	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>protones</b> agrupados por <b>número</b> de partículas secundarias recogidas en la <b>corona lejana</b>. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{\max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM (4.2).</i>	121
4.4	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>fotones</b> agrupados por <b>número</b> de partículas secundarias recogidas en la <b>corona lejana</b>. Al igual que en la figura 4.1, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{\max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.</i>	122
4.5	<i>Dependencia de la función de escalado de momentos estadísticos <math>K(q)</math> con el tamaño de la muestra para protones de 10 TeV.</i>	123
4.6	<i>Dependencia de la función de escalado de momentos estadísticos <math>K(q)</math> con el tamaño de la muestra para protones de 30 TeV.</i>	124
4.7	<i>Comportamiento de la función de escalado de momentos estadísticos <math>K(q)</math> para pequeñas variaciones de los parámetros <math>\alpha</math> y <math>C_1</math> en las muestras de protones de 60 TeV.</i>	126
4.8	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>protones</b> clasificados por <b>energía</b> en el análisis <b>cercano</b>. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{\max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.</i>	131
4.9	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>fotones</b> clasificados por <b>energía</b> en el análisis <b>cercano</b>. Al igual que en la figura 4.8, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{\max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.</i>	132
4.10	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>protones</b> clasificados por el <b>número</b> de partículas secundarias que se recogen en la <b>corona cercana</b>. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{\max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.</i>	133

4.11	<i>Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de <b>fotones</b> clasificados por el <b>número</b> de partículas secundarias que se recogen en la <b>corona cercana</b>. Al igual que en la figura 4.10, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para <math>q_{max} = 5</math>, mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.</i>	134
5.1	<i>Distribución del estadístico <math>\chi_r^2</math> para <math>n</math> grados de libertad.</i>	140
5.2	<i>Distribución del estadístico <math>\chi_r^2</math> para las muestras de fotones y protones primarios sin haber filtrado la componente de ruido blanco.</i>	141
5.3	<i>(a) Representación del estadístico <math>\chi_r^2</math> de acuerdo con la figura 5.2. (b) Factor de calidad <math>Q</math> para cortes según el valor de dicho estadístico.</i>	143
5.4	<i>Representación logarítmica de la PSD global y de las muestras agrupadas por tipo de primario para análisis en coronas lejanas.</i>	144
5.5	<i>Distribución del estadístico <math>\chi_r^2</math> en análisis lejano, para las muestras de fotones y protones primarios, habiendo filtrado la componente de ruido blanco mediante un filtro adaptado al tipo de muestra.</i>	145
5.6	<i>Dependencia con la energía de los parámetros <math>A</math> y <math>C</math> para todos los primarios clasificados por energía en las coronas lejanas y cercanas.</i>	146
5.7	<i>Dependencia con el bin <math>\Delta N_s</math> de los parámetros <math>A</math> y <math>C</math> para todos los primarios clasificados por <math>N_s</math> en las coronas lejanas y cercanas.</i>	147
5.8	<i>(a) Representación del estadístico <math>\chi_r^2</math> para fotones y protones filtrados mediante el <b>filtro global universal</b> en análisis lejano. (b) Factor de calidad <math>Q</math> para cortes según el valor de dicho estadístico.</i>	149
5.9	<i>(a) Representación del estadístico <math>\chi_r^2</math> para fotones y protones filtrados mediante el <b>filtro global de protones</b> en análisis lejano. (b) Igual que el anterior pero en análisis cercano. (c) Factor de calidad <math>Q</math> para cortes según el valor del estadístico para los dos tipos de análisis.</i>	150
5.10	<i>(a) Representación del estadístico <math>\chi_r^2</math> para fotones y protones filtrados mediante el <b>filtro global de fotones</b> en análisis lejano. (b) Igual que el anterior pero en análisis cercano. (c) Factor de calidad <math>Q</math> para cortes según el valor del estadístico para ambos tipos de análisis.</i>	151
5.11	<i>Representación del estadístico <math>\chi_r^2</math> para las muestras de fotones y protones filtradas mediante el filtro global de protones, cuando variamos el número de sectores de la corona en análisis lejano (parte superior). En la parte inferior se muestran los factores de calidad <math>Q</math> obtenidos para las escalas consideradas.</i>	153

5.12 Representación del estadístico $\chi_r^2$ para las muestras de fotones y protones filtradas mediante el filtro global de protones, cuando variamos el número de sectores de la corona en análisis <b>cercano</b> (parte superior). En la parte inferior se muestran los factores de calidad $Q$ obtenidos para las escalas consideradas. . . . .	154
---	-----



# Índice de tablas

2.1	<i>Parámetros del ajuste, <math>\Phi_0</math> (<math>m^2 \cdot s \cdot sr \cdot TeV/núcleo</math>) a 1 TeV y <math>\gamma</math>, a <math>dN/dE = \Phi_0 E^{-\gamma}</math> para RC en el rango 100 GeV - 100 TeV, de Wiebel [53].</i>	62
3.1	<i>Composición de la librería generada, clasificada por energía del rayo cósmico primario. Para todos los casos, la incidencia es vertical, es decir, bajo un ángulo azimutal de <math>90^0</math>.</i>	83
3.2	<i>Características de la librería cuando los sucesos se clasifican por el número de partículas que dejan en la corona. Aquí <math>N_{p1}</math> y <math>N_{p2}</math> son los números de sucesos que han dejado un número de partículas secundarias en las coronas lejana y cercana respectivamente, dentro del bin <math>\Delta N_s</math>.</i>	84
3.3	<i>Parámetros A y C de la Power Spectrum Density media según el modelo propuesto en (3.13) para análisis lejano.</i>	93
3.4	<i>Parámetros A, B y C de la PSD media según el modelo definido en (3.12) para muestras de protones y fotones de 30 TeV de energía considerando el core en el origen coordenado, sistemáticamente desplazado a la posición (150cm,150cm) y ocupando una posición aleatoria cercana al origen.</i>	100
3.5	<i>Parámetros A, B y C de la Power Spectrum Density media según el modelo <math>P_{mod}(k) = \frac{A}{k^B} + C</math> cuando se efectúa el análisis cercano. Se encuentra un ajuste no muy bueno a bajo k para los fotones en contraposición con el excelente ajuste para los protones.</i>	100
3.6	<i>Valores del parámetro H de no estacionaridad según las funciones de estructura.</i>	104
3.7	<i>Parámetros A y C de la PSD, según el modelo (3.13), cuando los sucesos se clasifican por el número de partículas que dejan en la corona lejana. Aquí <math>N_1</math> a <math>N_7</math> son los nombres simbólicos que reciben los grupos de sucesos clasificados (vease la tabla 3.2).</i>	107
3.8	<i>Parámetros A, B y C de la PSD, según el modelo (3.12), cuando los sucesos se clasifican por el número de partículas secundarias que se recogen en la corona cercana.</i>	112

3.9	Valores del parámetro $H$ de no estacionaridad, según las funciones de estructura, para los protones clasificados por número de partículas secundarias. . . . .	112
4.1	Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal $\alpha$ y $C_1$ para análisis lejano, por ajuste a la función $K(q)$ dada por (1.90). Se indican los rangos de momentos considerados para realizar los ajustes: (a) para $q_{\min} = 0.1$ a $q_{\max} = 2.0$ y (b) para $q_{\min} = 0.1$ a $q_{\max} = 5.0$ . . . . .	125
4.2	Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal $\alpha$ y $C_1$ para análisis lejano para sucesos clasificados por $N_s$ . Los rangos son los mismos que se tomaron en la tabla 4.1. . . . .	127
4.3	Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal $\alpha$ y $C_1$ para los datos clasificados por energía en análisis cercano, mediante ajuste a la función $K(q)$ dada por (1.90). Los rangos de $q$ utilizados para el ajuste son los mismos que en la tabla (4.1). . . . .	128
4.4	Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal $\alpha$ y $C_1$ para los datos clasificados por $N_s$ en análisis cercano, mediante ajuste a la función $K(q)$ dada por (1.90). Los rangos de $q$ utilizados para el ajuste son los mismos que en la tabla (4.1). . . . .	129
4.5	Estimación de los parámetros del modelo Multifractal Universal, $\alpha$ y $C_1$ , mediante la técnica de los DTM. . . . .	135
4.6	Estimación de los parámetros del modelo Multifractal Universal, $\alpha$ y $C_1$ , mediante la técnica de los DTM para la clasificación de los sucesos por el número de partículas secundarias recogidas en las coronas. . . . .	136
5.1	Parámetros $A$ , $B$ y $C$ de los filtros globales universal: $\mathbf{rc}$ , de protones: $\mathbf{p}$ y de fotones: $\gamma$ para análisis lejano. En (*) se asume que $B = 1$ . . . . .	144
5.2	Parámetros $A$ , $B$ y $C$ de los filtros globales de protones: $\mathbf{p}$ y de fotones: $\gamma$ según el análisis cercano. En (*) se asume que $B = 1$ . . . . .	148
5.3	Valores de corte del estadístico $\chi_r^2$ que maximizan el factor de calidad $Q$ para distintos tipos de filtro aplicado, según análisis lejano y cercano. . . . .	152



# Introducción

De entre las muchas cosas provenientes del ámbito científico que se han popularizado en los últimos años, destacan, sin duda, los fractales. Son formas bellas e infinitamente complejas que pueden imitar texturas que se encuentran en el mundo real. La geometría fractal se ha infiltrado en el mundo del diseño, la música, la literatura y el arte, influenciando el modo de ver la realidad. Frente a una imagen pintoresca, propiciada por el afán de divulgar, se encuentra una enorme potencialidad científica para describir la complejidad de muchos sistemas físicos. La heterogeneidad que presenta la naturaleza es campo abonado para que la geometría fractal se pueda aplicar como un método analítico parejo a otras herramientas estadísticas con las que describir hechos físicos de muy variada índole. La descripción que proporciona una aproximación basada en las propiedades de autosimilaridad y dependencia con la escala de observación de muchos fenómenos, puede considerarse revolucionaria en la medida que desvela características que son pasadas por alto en tratamientos considerados convencionales. Ejemplos de estos tratamientos se encuentran en casi todas las áreas de la ciencia, afectando a gran número de situaciones. La descripción mediante los parámetros caracterizadores del modelo *fractal/multifractal* propuesto, constituye un claro avance en nuestro conocimiento.

En este trabajo se pretende ampliar el campo de las aplicaciones de los fractales a la Física de Rayos Cósmicos, describiendo las características de las fluctuaciones que presenta la densidad de partículas detectadas en tierra y producidas por la cascada atmosférica originada por la radiación cósmica de alta energía que penetra en la misma. Las motivaciones que conducen a un estudio detallado de las fluctuaciones antes mencionadas son de diverso tipo:

- Su estadística no obedece a una distribución gaussiana, independientemente de la resolución elegida para construir los histogramas en frecuencias que registran las desviaciones respecto del valor medio.
- Existen correlaciones entre las desviaciones asociadas a un mismo tipo

de suceso (autocorrelaciones), lo cual es indicativo de una estructura compleja.

- Las distribuciones laterales presentan subestructuras cuya frecuencia estadística e intensidad para los protones es muy superior a la de los fotones.

Aunque lo natural sería abordar el problema en un espacio bidimensional, el correspondiente al área de detección de la señal, resulta mucho más simple una aproximación unidimensional basada en el estudio de la distribución de partículas secundarias en una corona centrada en el *core* del suceso.

Para proveer al estudio de una base estadística suficiente se ha generado una librería de sucesos, mediante el programa CORSIKA 4.50, consistente en muestras de protones y fotones primarios de energías comprendidas en el rango de 10 a 60 TeV. Las simulaciones se llevaron a cabo para incidencia vertical, habida cuenta de que, en otro caso, los efectos introducidos son de naturaleza geométrica y no alteran las conclusiones obtenidas. El estudio estadístico se inicia con la suposición de que cada suceso es la realización de un proceso estocástico que vendrá caracterizado, hasta el orden  $n$ , por su  $n$ -orden distribución de probabilidad. En realidad, para nuestros propósitos, sólo nos ocupamos del estudio pormenorizado de su estadística hasta el segundo orden. Como primer paso, debe realizarse un estudio de las correlaciones a dos puntos, en el espacio de Fourier, mediante la estimación de la *Power Spectrum Density* (PSD) del proceso, para los dos tipos de primario considerados. Si las fluctuaciones careciesen de estructura, aun en el caso de no ser gaussianas, deberían mostrar una PSD ajustable a una línea horizontal como corresponde a un ruido sin correlación. En cambio, la PSD resultante, para ambos primarios, resulta una función de la frecuencia espacial  $k$ , que puede ajustarse a una expresión analítica sencilla. El resultado se interpreta como la combinación de un ruido  $1/f$  o *flicker noise* y de una señal aleatoria sin correlación, es decir, un ruido blanco. Aunque el origen de tal combinación no está claro, lo cierto es que la presencia de subestructuras en las señales es, sin duda, en parte responsable del término dependiente de  $k$ . La distinción entre los dos primarios se establece a través de los valores de los parámetros libres del modelo propuesto para la PSD. En este trabajo, el ruido blanco va a jugar un papel de señal contaminante del verdadero protagonista, que es el ruido  $1/f$ . Por esta razón, se propone un procedimiento simple de filtrado, que sólo preserva esta componente.

Las señales de tipo  $1/f$ , pueden tener una estructura compleja y, frecuentemente, se encuentran leyes de escala para sus momentos estadísticos. Cuando esto sucede, nos encontramos ante una *medida multifractal estocástica*, pudiendo ser caracterizada mediante su segunda función característica  $K(q)$ ,

llamada también exponente de escalado de los momentos estadísticos de la distribución de primer orden. La importancia de  $K(q)$  reside en que su conocimiento, permite una modelización simple basada en el proceso a '*cascada multiplicativa*'. Para nuestros datos, comprobando que efectivamente existe una ley de escalado con la resolución, y libres del ruido blanco contaminante, se han determinado las funciones  $K(q)$  para todos y cada uno de los grupos de primarios. Las formas funcionales pueden ser ajustadas a un modelo, *multifractal universal*, que las parametriza con ayuda de dos parámetros  $\alpha$  y  $C_1$  que dan cuenta, respectivamente, del tipo de distribución de probabilidad que debe ser usado en el modelo a cascada multiplicativa y de cómo distribuir los valores resultantes en el soporte, en nuestro caso la corona.

Finalmente, como aplicación interesante, se propone un procedimiento para distinguir los sucesos originados por un rayo  $\gamma$  primario de los originados por un protón primario (separación  $\gamma$ /protón), basado en la medida de la bondad del ajuste de las distribuciones de partículas en la corona a una constante. El parámetro que mide esto es una variante del estadístico  $\chi^2$  reducido. Cada suceso viene caracterizado por un valor del estadístico, de manera que al representar conjuntamente los valores para los protones y fotones se observa que las distribuciones están lo bastante separadas como para que un corte en el valor del estadístico mejore sensiblemente la relación señal/ruido, considerando bajo el término señal a los sucesos de tipo fotón y ruido a los protones. Para medir esta mejora se introduce una magnitud adimensional denominada *factor de calidad*. Cuando aplicamos este procedimiento a los datos sin manipular, se alcanzan factores de calidad no elevados, aunque interesantes, habida cuenta de la gran simplicidad del presenta el procedimiento. Sin embargo es posible mejorar sensiblemente el factor de calidad sin más que eliminar la componente de ruido blanco de los datos. Pero, para que un procedimiento de este tipo sea válido en la práctica, debemos aplicar el mismo filtro a todos los sucesos, independientemente de su tipo. Por esta razón definimos diversos tipos de filtro a aplicar, poniéndose de manifiesto que el que consigue mejores resultados es el denominado *filtro global de protones*. Dicho filtro se construye con parámetros deducidos de considerar conjuntamente todos los protones, sin distinción en energía, como realizaciones de un mismo proceso estocástico. La aplicación de este filtro a todos los sucesos proporciona una buena separación en las distribuciones del estadístico y unos aceptables valores del factor de calidad.



# Capítulo 1

## Fractales y multifractales

El concepto de *conjunto fractal*, dado a conocer por B. Mandelbrot, fue creado para dar cabida en la estructura formal de la geometría a diversos objetos, denominados entonces *monstruos geométricos*, cuyo comportamiento se apartaba radicalmente del mostrado por los conjuntos que estaban en la base conceptual de esta disciplina. Tal es el caso del conocido conjunto de Cantor (1872), de la curva de Weierstrass, la cual no es diferenciable en ningún punto (1875), o de las curvas de Von Koch (1904), en todas sus variantes[1, 2, 3, 4]. Pese a sus inicios en el ámbito estricto de las matemáticas, los fractales han traspasado ampliamente las fronteras de lo abstracto para servir de modelos en múltiples campos de la ciencia. Las propiedades que presentan frente a cambios de escala fueron utilizadas, por ejemplo, por Gutenberg y Richter[5] para establecer su ley de distribución de intensidades de terremotos, y por Richardson[6] para establecer que los perfiles costeros poseían propiedades similares a algunas de las curvas de Von Koch. La hidrología, geografía, geofísica[7], ecología y economía[8], han sido campos pioneros en el desarrollo de modelos basados en los fractales. Los éxitos en estos campos y, a veces quizás, la imposibilidad de encontrar otro ámbito más adecuado han conducido, por un lado, a una considerable ampliación de los campos de aplicación[9, 10] y por otro a incrementar enormemente la base teórica en la que se apoyan[11].

El concepto de *multifractal* surge para incluir en el esquema a conjuntos aún más complejos, que presentan *ley de escalado múltiple* y que en su versión más actual, la de los *multifractales universales estocásticos*, permite modelar una gran variedad de procesos no lineales. Pueden encontrarse aplicaciones físicas de estos objetos en campos como la física de altas energías, la meteorología, las ciencias medioambientales y otros muchos en los que actualmente se trabaja activamente con ellos.

## 1.1 Orígenes de la geometría fractal

Mandelbrot[3] fue el primero que intentó dar una definición precisa de un fractal: *Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovich excede estrictamente su dimensión topológica*. Esta definición requiere que estén definidos los términos, conjunto, dimensión de Hausdorff-Besicovich<sup>1</sup>  $D_H$  y dimensión topológica  $D_t$ , la cual es siempre un número entero, así como los elementos necesarios para **medir** los conjuntos. Como las imágenes sencillas y los conceptos simples son mucho más fáciles de interpretar, el propio Mandelbrot[12] propuso otra definición alternativa: *Un fractal es una forma compuesta de partes similares en algún sentido al todo*.

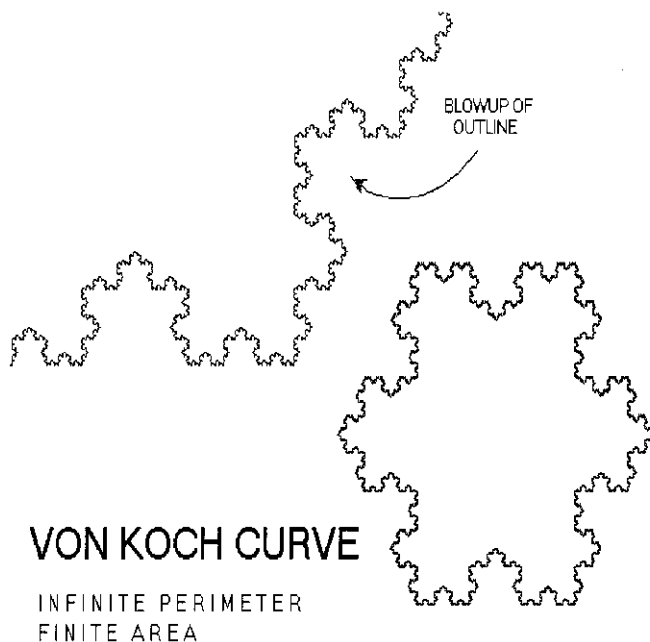


Figura 1.1: Curva de Von Koch regular y detalle de la misma.

entenderse en un sentido geométrico aunque también es posible extender su significado al ámbito estadístico. La medida de las propiedades geométricas o estadísticas del conjunto será lo que determine si el objeto es o no convencional.

El carácter autosimilar de los conjuntos fractales impone condiciones ex-

El problema es que la primera definición, aunque precisa y correcta, es demasiado restrictiva ya que excluye de la categoría a muchos fractales que se usan en física. La segunda definición contiene la característica esencial que muchos autores enfatizan y que además puede verse claramente en los experimentos: *Un fractal parece la misma cosa cualquiera que sea la escala con la que se mire*. Esta propiedad, frecuentemente denominada **autosimilaridad**, suele

<sup>1</sup>Esta definición se verá un poco más adelante.

trañas sobre el aspecto que pueden tener estos. Los a veces denominados *fractales deterministas regulares*, como la curva de Von Koch o el triángulo de Sierpinsky[2], poseen una imagen en la que se identifica de manera inmediata la autosimilaridad<sup>2</sup>. En cambio, en los fractales no regulares, como por ejemplo un perfil costero, no es fácil detectar esta propiedad a menos que utilizemos algún procedimiento que revele el tipo de dependencia de las propiedades del objeto con la escala de observación del mismo.

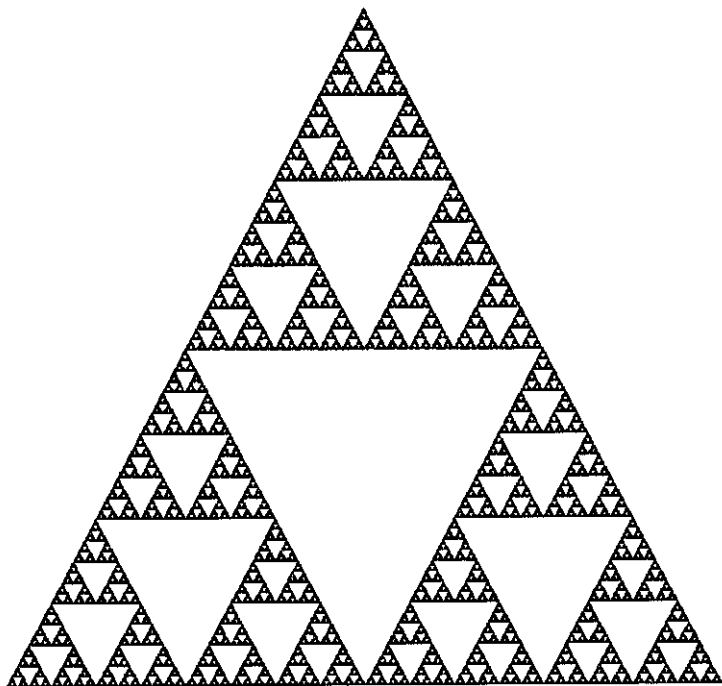


Figura 1.2: Triángulo de Sierpinsky.

Por muy irregular que un objeto geométrico nos parezca, la geometría convencional nos dice que siempre se encuentra una escala de observación, o *resolución*, ligada al tamaño de la unidad de medida empleada, a partir de la cual resulta un objeto perfectamente *liso*. Esta escala de observación, llamada frecuentemente **escala característica**, esta ausente en los *fractales*. Si, por ejemplo, se intenta medir

el perímetro de la costa de Noruega, se encuentra que dicha longitud depende de manera sensible de la unidad de longitud  $\delta$  que estemos usando y nunca podremos llegar a una resolución lo bastante pequeña como para asegurar que el perímetro no dependa de ella. Esto provoca que el perímetro costero pueda crecer indefinidamente. Esta es otra de las características de los fractales: **irregularidad a cualquier escala**[4]. De un modo intuitivo puede decirse que a medida que reducimos la escala vamos extrayendo la compleja estructura del objeto a niveles cada vez más pequeños, por lo que dicho objeto no puede considerarse *liso* y por tanto no es encuadrable en las

---

<sup>2</sup>En la sección dedicada a los fractales deterministas se dará una caracterización precisa de la propiedad de autosimilaridad que estos poseen.

categorías ya establecidas en la geometría ordinaria.

Los fractales que ahora consideramos son conjuntos de puntos inmersos en el espacio. Por ejemplo, el conjunto de puntos que forman una línea recta en el espacio Euclideo ordinario tiene dimensión topológica  $D_t = 1$  y su dimensión de Hausdorff-Besikovich es  $D_H = 1$  y la dimensión euclídea del espacio es  $E = 3$ . Ya que  $D_H = D_t$ , de acuerdo con la primera definición de Mandelbrot, la línea recta no es un fractal. Igualmente, el conjunto de puntos que forman una superficie en  $E = 3$  tiene dimensión topológica  $D_t = 2$  y  $D_H = 2$ . De nuevo, una superficie ordinaria no es fractal por muy compleja que esta sea. Finalmente, una esfera tiene  $D_H = 3$  y  $D_t = 3$ . Para los conjuntos geométricos ordinarios, la dimensión de Hausdorff-Besikovich no se diferencia de la dimensión topológica, y es precisamente la primera la que cambia al describir un objeto fractal. Dado que el concepto de dimensión va estrechamente ligado al de medida, la clave está en la manera de medir los objetos. Es necesario, pues, revisar el concepto y los procedimientos de medida de los conjuntos de puntos.

Una manera sencilla de medir conjuntos de puntos en el espacio consiste en dividir el espacio en pequeños cubos de lado  $\delta$ , o también podemos usar esferas de diámetro  $\delta$ . Si centramos una de estas esferas en un punto del conjunto a medir, entonces todos los puntos que están a una distancia  $r < \delta/2$  del punto en que se centra la esfera están dentro de la esfera. Contando el número de esferas que se necesitan para que todos los puntos del conjunto se encuentren dentro de las esferas, obtenemos una medida del tamaño del conjunto. Una curva, por ejemplo, se puede medir hallando el número de segmentos de línea  $N(\delta)$  de longitud  $\delta$  que se necesitan para recubrir completamente la curva. Para una curva ordinaria se tiene que

$$N(\delta) = \frac{L_0}{\delta} \quad (1.1)$$

La longitud de la curva vendrá dada por

$$L = N(\delta)\delta \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0 \quad (1.2)$$

En el límite  $\delta \rightarrow 0$  la medida  $L$  es asintóticamente igual a la longitud de la curva y además independiente de  $\delta$ . También podemos asociar un área con el conjunto de puntos definidos por la curva contando el número de discos o cuadrados necesarios para recubrir la curva. Este número de cuadrados es de nuevo  $N(\delta)$  y como cada cuadrado tiene un área de  $\delta^2$ , el área asociada a la curva será

$$A = N(\delta)\delta^2 \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1 \quad (1.3)$$



De manera similar podemos asociar un volumen  $V$  con la curva mediante

$$V = N(\delta)\delta^3 \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2 \quad (1.4)$$

Para curvas ordinarias tanto  $A$  como  $V$  tienden a cero cuando  $\delta$  tiende a cero y por ello la única medida de interés es la longitud de la curva. Si se considera ahora el conjunto de puntos que definen una superficie, lo normal es medirlo mediante cuadrados de área  $\delta^2$  que recubren completamente el conjunto. El área asociada es

$$A = N(\delta)\delta^2 \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^0 \quad (1.5)$$

Podemos también asociar un volumen con esta superficie

$$V = N(\delta)\delta^3 \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^1 \quad (1.6)$$

sin embargo, este volumen se anula en el límite  $\delta \rightarrow 0$ . Aún podemos asociar una longitud con la medida de este conjunto, al menos formalmente, si consideramos

$$L = N(\delta)\delta \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^{-1} \quad (1.7)$$

la cual diverge para el límite  $\delta \rightarrow 0$ . Esto era de esperar, ya que es imposible recubrir una superficie con un número finito de segmentos de línea. Concluimos, por tanto, que la única medida útil (finita) de un conjunto de puntos que definen una superficie en tres dimensiones es el área. Sin embargo, existen curvas que se retuercen de tal modo que su longitud llega a ser infinita. Y aún más, hay curvas, como la de Peano[2], que llenan completamente el plano. También existen superficies tan intrincadas que llenan el espacio. Para poder estudiar estos objetos es necesario generalizar el concepto de medida del tamaño de dichos objetos.

Hasta ahora hemos tomado un pequeño objeto patrón, segmento, disco, cuadrado, bola, de tamaño dado por la función

$$h(\delta) = \gamma(d)\delta^d \quad (1.8)$$

donde  $d$  es un número real denominado **dimensión** de la medida y  $\gamma(d)$  es un factor numérico variable con el tipo de objeto, y con éstos hemos recubierto el conjunto de puntos obteniendo la medida

$$M_d = \sigma\gamma(d)\delta^d \quad (1.9)$$

en la que  $\sigma$  representa el factor de proporcionalidad entre la medida del conjunto y el tamaño del objeto. En general, se encuentra que, cuando  $\delta$

tiende a cero,  $M_d$  **pasa de cero a infinito** dependiendo de la elección del número  $d$ . La *dimensión de Hausdorff-Besikovich*[13, 14],  $D_H$ , del conjunto de puntos se define como la dimensión crítica para la cual la medida  $M_d$  pasa de cero a infinito

$$M_d = \gamma(d)\delta^d N(\delta) \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & d > D_H \\ \infty & d < D_H \end{cases} \quad (1.10)$$

A  $M_d$  se la denomina **d-medida del conjunto**<sup>3</sup>. El valor de la d-medida para  $d = D_H$  es frecuentemente finito, aunque puede ser cero o infinito. Lo que verdaderamente importa es el salto de cero a infinito de  $M_d$  considerada como una función de  $d$ . En la práctica se recubre el conjunto con objetos familiares como cuadrados o cubos y se estudia el comportamiento de

$$N(\delta) \propto 1/\delta^{D_b} \quad (1.11)$$

relación que se cumple asintóticamente en el límite de  $\delta$  pequeña. Una gráfica doble logarítmica nos dará la dimensión  $D_b$ , llamada *dimensión de recuento por cajas* (box counting dimension BC), la cual coincide con la dimensión de Hausdorff-Besikovich en la mayor parte de los casos. La diferencia entre una y otra dimensión está en la forma rigurosa en que se define la medida de Hausdorff-Besikovich (HB) y la BC. Mientras que en la última todos los subconjuntos del recubrimiento contribuyen a la suma que representa la medida con el mismo peso  $\delta^{D_b}$ , en la definición de la medida de HB cada conjunto del recubrimiento aporta a la suma el valor de su diámetro elevado a la potencia  $D_H$ -ésima.

Para ser realistas, hay que decir que existe un gran número de definiciones que implican la noción de *dimensión* de un conjunto y que en la literatura es frecuente que se la denomine de forma genérica *dimensión fractal*  $D_f$ . Esta ambigüedad surge del hecho de que la noción de dimensión fractal implica la existencia de una ley de potencias de alguna magnitud

---

<sup>3</sup>Rigurosamente hablando, dado un conjunto E del espacio Euclideo n-dimensional, su medida d-dimensional de Hausdorff[13] viene dada por

$$H^d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d \right\}$$

siendo  $\{A_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de E, la cual representa el d-tamaño del conjunto. Se define también la dimensión de Hausdorff de E como

$$D_H = \sup\{d : H^d(E) = \infty\} = \inf\{d : H^d(E) = 0\}$$

De este modo,  $D_H$  representa el nivel adecuado en el que E debe ser medido y  $H^{D_H}(E)$  la medida del conjunto efectuada en dicho nivel.

con la escala de medición[4]. El método empleado para extraer la ley de escala, el cual depende a su vez de la magnitud que supuestamente escala, dicta el valor que tendrá el exponente de la ley de potencias. Para los conjuntos ordinarios todas estas dimensiones suelen coincidir, pero para los conjuntos fractales algunas de ellas difieren sensiblemente entre sí [14].

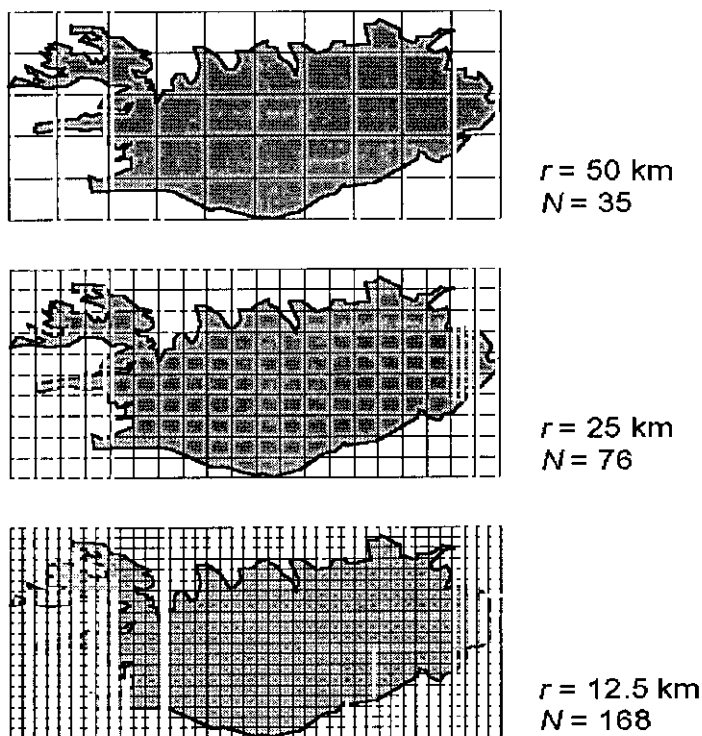


Figura 1.3: Determinación de la dimensión de recuento por cajas,  $D_b$ , del perfil costero de Islandia. Se representan tres escalas de medida  $r$  y el correspondiente número de cajas necesario para recubrir el objeto.

Qué significado preciso tiene decir que un objeto real, tal como una costa, o la red capilar del sistema venoso, es un fractal?. Lo que se afirma con ello es que puede definirse un *modelo matemático fractal* que aproxima satisfactoriamente el objeto real, en toda una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo que llamaremos **corte superior e inferior**, según Mandelbrot. Mediante esta precisión queda claro lo que significa que un objeto real posee determinada dimensión de Hausdorff-Besikovich  $D_H$ . Con

ello se alude a las correspondientes propiedades del modelo matemático que aproxima al modelo real. Según esto, en el mundo real no existen fractales como tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de la dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la tierra. Para estimar la validez de un modelo fractal de un objeto real hay que tener en cuenta el corte inferior de escalas,  $r$ , y el corte superior de escalas,  $R$ , que marcan los límites entre los cuales existe una adaptación aceptable entre modelo matemático y objeto real. El valor del cociente  $r/R$  es un número comprendido entre 0 y 1 y cuanto más próximo se halle a cero, mayor será el valor del

modelo matemático. A modo de ejemplo diremos que se podría construir un modelo matemático de naturaleza fractal válido para el estudio del universo, tomando un corte inferior del orden del diámetro de la galaxia con tal de considerar cortes superiores suficientemente amplios. Tal modelo reproduciría la estructura geométrica de la distribución de las galaxias[2].

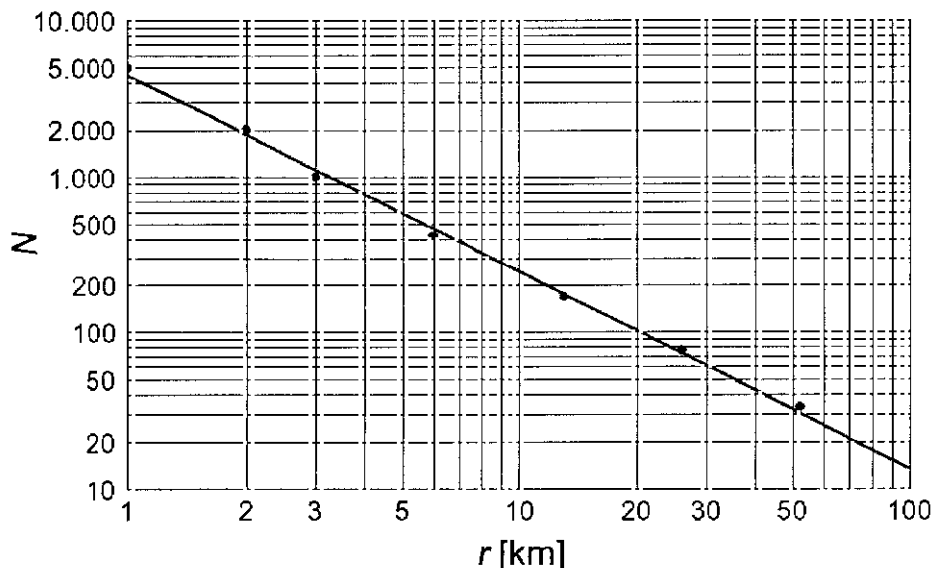


Figura 1.4: Representación en escala logarítmica de la relación entre  $N$  y  $r$  para la determinación de la dimensión  $D_b$  del perfil costero de Islandia. El ajuste a (1.11), con  $\delta \equiv r$ , nos va a proporcionar el valor de dicha dimensión.

## 1.2 Fractales deterministas

En la construcción de muchos modelos fractales hay siempre presente un proceso iterativo que puede ser determinista o estocástico. Cuando las reglas que definen la transición de una etapa a la siguiente no contienen signos de aleatoriedad, decimos que el fractal es *determinista*. Otros modelos, en cambio, se definen a partir de funciones que presentan propiedades especiales y que aparentemente no llevan asociado ningún procedimiento de iteración [2, 15].

### 1.2.1 Fractales regulares

Veamos primero algunos modelos construidos mediante un proceso de iteración. Por ejemplo, para construir la ya citada curva de Von Koch, de dimensión fractal  $D_f = \log(4)/\log(3) = 1.262$ , se parte del segmento unidad  $[0,1]$ , *iniciador*, y se divide en tres partes, sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto a dicha parte formarían un triángulo equilátero (*generador*).

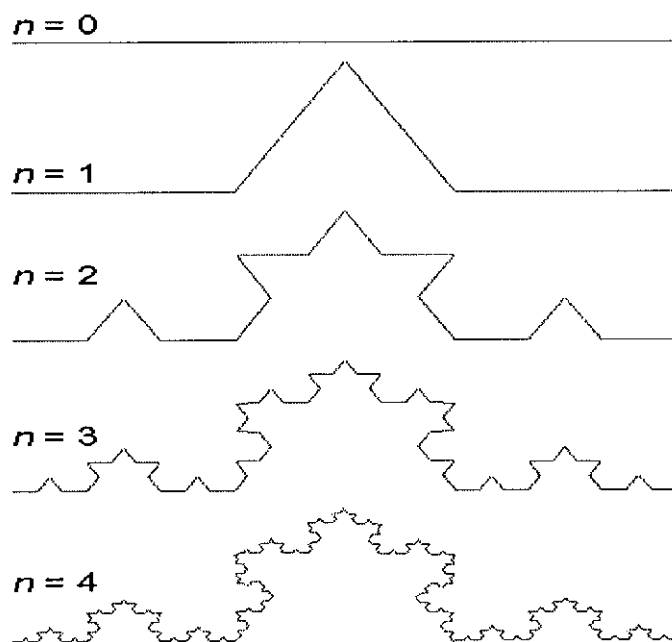


Figura 1.5: *Generación de la curva regular de Von Koch. El segmento recto superior representa el iniciador,  $n = 0$ , del proceso iterativo. Para las sucesivas etapas se aplica el generador a todos los segmentos rectos que presenta la figura (ver texto).*

Se obtiene una poligonal  $P_1$  de longitud  $4/3$  (figura 1.5). Con cada uno de los cuatro segmentos que así quedan determinados se repite la operación anterior, obteniendo la poligonal  $P_2$  de longitud  $16/9$ . Se procede indefinidamente de esta manera, obteniendo en cada etapa  $k$  una poligonal  $P_k$  de longitud  $(4/3)^k$ . La curva de Von Koch se define como la curva límite a que converge la sucesión  $P_k$  cuando  $k$  tiende a infinito, tratándose de una curva continua y no diferenciable en ningún punto y de longitud infinita.

Más aún, la longitud de la parte de curva comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma es también infinita. Si en este proceso iterativo elegimos de manera aleatoria la orientación del triángulo equilátero, se va a obtener una curva mucho más útil como modelo de perfiles costeros reales[14, 2, 15].

El triángulo de Sierpinski es otro ejemplo de fractal obtenido de un proceso recurrente. Sea  $T_0$  un triángulo equilátero de lado unidad. Se consideran los tres triángulos equiláteros cerrados  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{13}$  que encajan en los

vértices de  $T_0$  como indica la figura, de lado  $r \leq 1/2$ . Se repite el proceso con cada uno de ellos, de modo que después de haber efectuado  $k$  iteraciones,

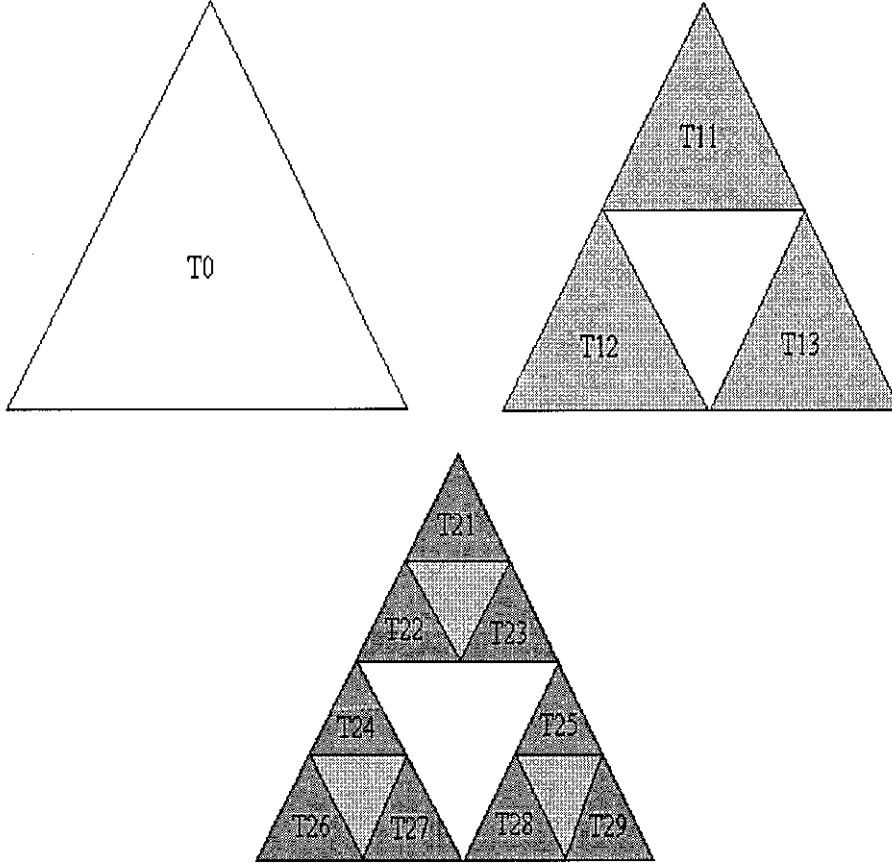


Figura 1.6: *Generación del triángulo de Sierpinsky.*

obtendríamos  $3^k$  triángulos cerrados  $\{T_{kj}\}$  con  $j = 1 \dots 3^k$  de lado  $r^k$ . Se define el triángulo de Sierpinski generalizado[16] de razón  $r$ , como el conjunto  $T$  al que tiende la sucesión

$$T_k = \bigcup_{j=1}^{3^k} T_{kj} \quad (1.12)$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ . De una manera más precisa se puede escribir que

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{3^k} T_{kj} \quad (1.13)$$

siendo  $T_{k+1} \subset T_k$  para todo  $k$ .

La autosimilaridad que presentan los conjuntos fractales puede ser aprovechada, no solo para generarlos mediante un procedimiento iterativo, sino también como una caracterización de los mismos. En efecto, diremos que un conjunto  $E$  es *autosimilar*<sup>4</sup>, si existen  $m$  semejanzas contractivas<sup>5</sup>  $\{f_1, \dots, f_m\}$  de razones  $r_1, \dots, r_m$  tales que

$$E = \bigcup_{j=1}^m f_j(E) \quad (1.14)$$

Esta condición indica que  $E$  no varía respecto de la transformación  $E \rightarrow S(E) = \bigcup_{j=1}^m f_j(E)$  que expresa formalmente la idea de que  $E$  es la unión de partes semejantes. En general, el teorema de Hutchinson[17] asegura que siempre existe un conjunto autosemejante asociado a una familia de aplicaciones contractivas. Si  $r_1, \dots, r_m$  son las razones de contractividad y si estas aplicaciones resultan ser semejanzas, entonces puede definirse una **dimensión de autosemejanza**  $D_s$  como aquel único valor no negativo que verifica

$$\sum_{i=1}^n r_i^{D_s} = 1 \quad (1.15)$$

Por ejemplo, para el triángulo de Sierpinski generalizado, anteriormente descrito, se tiene que el conjunto de tres semejanzas que contraen el triángulo inicial  $T_0$ , respectivamente a los triángulos  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{13}$  de la primera etapa, son las que describen completamente el proceso de construcción del conjunto, obteniéndose además que la dimensión de autosemejanza de este conjunto es  $D_s = \log 3 / \log(1/r)$ .

Vemos que un fractal queda caracterizado por su conjunto de semejanzas y dado que éstas se componen generalmente de traslaciones y dilataciones, es fácil convencerse de que la enorme complejidad que representa un frac-

<sup>4</sup>También se dice autosemejante.

<sup>5</sup>Una transformación  $f$  en un espacio métrico  $(R^n, d)$  se dice que es una aplicación contractiva si existe un número  $r \in [0, 1)$ , llamado razón de la contractividad y tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y) \quad \forall x, y \in R^n$$

Si se verifica la igualdad, entonces  $f$  es una semejanza contractiva y  $r$  es su razón de semejanza[14, 2, 16].





tal queda reflejada en unos pocos números que definen las semejanzas a él asociadas. Para generar el conjunto puede tomarse como punto de partida cualquier conjunto y aplicarle reiteradamente el sistema de semejanzas. Esta descripción de los fractales deterministas se conoce como *sistema de funciones iteradas* (IFS)[14, 2, 15].

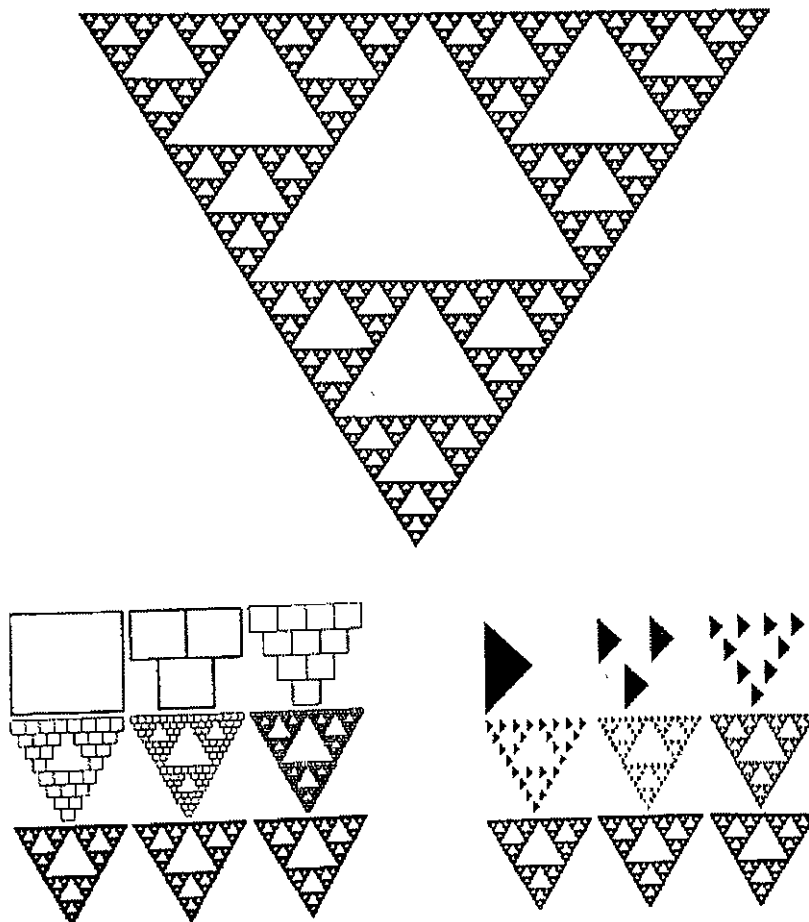


Figura 1.8: Generación del triángulo de Sierpinsky mediante el sistema IFS aplicado a dos generadores distintos: un cuadrado y un triángulo.

### 1.2.2 Funciones fractales

Se dirá en general que una función, definida analíticamente o no, es un fractal cuando su grafo es un conjunto fractal en  $\mathbb{R}^2$ . Si la definición de la

función viene dada de manera determinista mediante una ley precisa donde no exista ninguna variable aleatoria, tendremos un modelo fractal determinista, como es el caso de la función de Weierstrass[14, 2]. En este ejemplo se trata del grafo de la función que viene definida de manera analítica por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin \lambda^i x \quad (1.16)$$

con  $1 < s < 2$  y  $\lambda < 1$ . Dicha función es continua pero no es diferenciable en ningún punto. Como características generales de las funciones fractales destacamos la fuerte irregularidad de sus grafos presente a todas las escalas de observación y como consecuencia de ello, la ausencia de una **escala o longitud característica**.

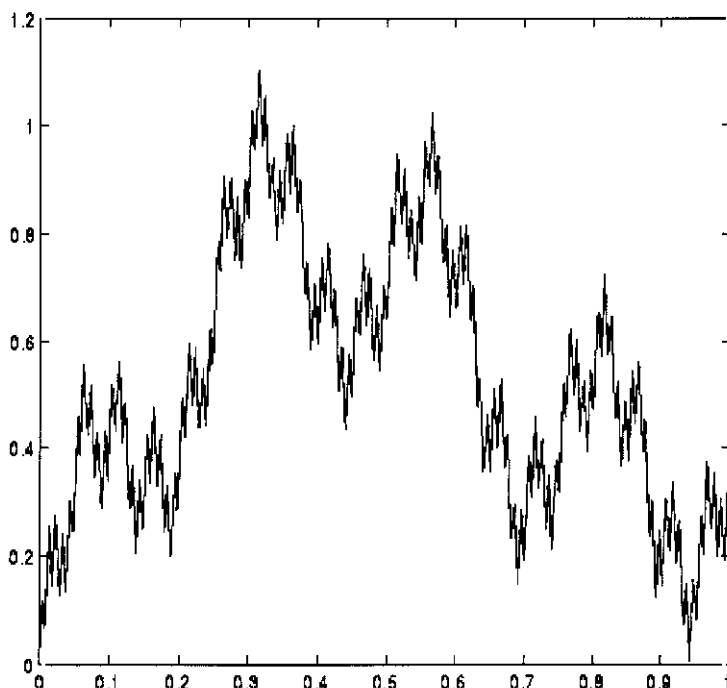


Figura 1.9: Representación de la función de Weierstrass en el intervalo  $[0, 1]$  para  $s = 1.5$  y  $\lambda = 0.4$ .

Cuando en la definición de la función entra en juego la aleatoriedad, se habla de *funciones fractales estocásticas*, que frecuentemente se denominan también *ruido fractal*, los cuales tendremos ocasión de

estudiar, puesto que sirven de modelos a multitud de procesos físicos[4].

### 1.3 Medidas multifractales deterministas

Mientras que para los conjuntos fractales el objetivo es la caracterización geométrica de los mismos en términos del parámetro denominado dimensión fractal  $D_f$ <sup>6</sup>, el cual, como se ha visto, admite una gran variedad de defi-

<sup>6</sup>Recordemos que  $D_f$  designa genéricamente una dimensión fractal, resultado de aplicar algún criterio que ponga de manifiesto las leyes de escala que rigen sobre el conjunto. Esta

niciones según sea el tipo de análisis que se realice, las llamadas *medidas multifractales*[1, 14] están relacionadas con el estudio de la distribución de cantidades físicas o de cualquier otra naturaleza sobre un soporte geométrico.

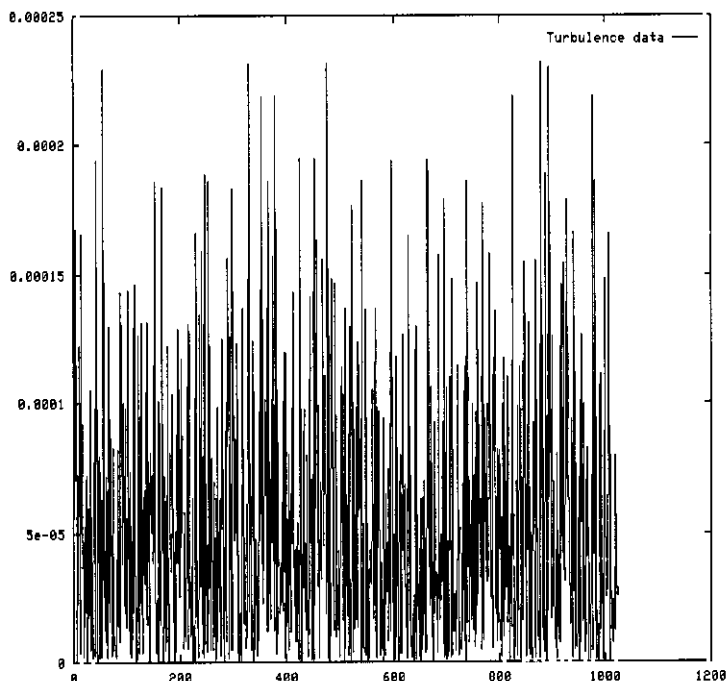


Figura 1.10: *Medida multifractal que representa la disipación de energía para una señal turbulenta.*

Dicho soporte puede ser una recta, un plano o un volumen ordinarios o podría ser también un fractal. Este concepto fue inicialmente introducido por Mandelbrot dentro del contexto del estudio de la turbulencia[18] y fue desarrollado y extendido por él mismo a muchos otros campos. La aplicación a la turbulencia fue desarrollada posteriormente por Frisch y Parisi[19] y Benzi et al.[20]. Gran parte del interés actual por los multifractales comenzó con los tra-

bajos de Grassberger[21], Hentschel y Procaccia[22] y Grassberger y Procaccia[23]. El posterior desarrollo teórico y conceptual, que abarca los que denominaremos multifractales deterministas, fue llevado a cabo por Badii y Politi[24], los ya citados Frisch y Parisi y Jensen et al. (1985) los cuales pudieron asimismo contrastar el acuerdo entre las observaciones experimentales y los modelos teóricos sencillos basados en estas ideas (convección multifractal de Rayleigh-Benard). La aplicación de los multifractales a los procesos de agregación por difusión limitada (DLA) ha sido llevada a cabo por Meakin et al. (1985,1986), Meakin (1987b,c) y Halsey et al.[25].

Una medida  $\mu$  permite describir el reparto de una cantidad física sobre un soporte geométrico  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Estas pueden corresponder a una masa, una carga, número de partículas, una probabilidad, etc. En muchas situaciones

---

dimensión puede ser BC,  $D_b$ , HB,  $D_H$  o cualquier otra de las definidas a lo largo de este trabajo.

una medida  $\mu$  se puede describir por su función densidad, la cual en un soporte unidimensional tendría la forma

$$\rho(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu(x, x + \delta)}{\delta} \quad (1.17)$$

Sin embargo, existen numerosos ejemplos para los cuales el límite anterior carece de sentido. En este caso la medida  $\mu$  no puede expresarse bajo la forma de una densidad (tampoco bajo la forma de distribuciones de Dirac) y se habla de *medida singular continua*. Estos casos se presentan cuando la medida se distribuye sobre un conjunto fractal o bien cuando la misma medida posee propiedades de autosimilaridad.

### 1.3.1 Espectro multifractal

Las distribuciones fractales son modelos matemáticos de distribuciones complejas que se caracterizan por una amplia variación de la intensidad de la distribución de la medida en el soporte. Para caracterizar el grado de singularidad de una medida arbitraria  $\mu$ , se introduce un parámetro local que describe la cantidad de medida que se acumula en torno a cada punto del soporte. El *exponente de singularidad* de la medida, también llamado *exponente de Holder* o *dimensión local* o *dimensión puntual*, en un punto  $x$  de su soporte se define por

$$\alpha(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B_x(\delta))}{\ln \delta} \quad (1.18)$$

donde  $B_x(\delta)$ , en un problema unidimensional, no es más que un intervalo de longitud  $\delta$  y centrado en el punto  $x$ . El conjunto de valores  $\alpha(x)$  cuando  $x$  recorre el soporte de la medida  $\mu$  es el conjunto de **singularidades** de dicha medida. Si el soporte es un conjunto  $E \subset \mathbb{R}$ , cada valor de  $\alpha$  permite definir el subconjunto  $E_\alpha \subset E$  de los puntos en los cuales la dimensión local existe y es igual a  $\alpha$ . Generalmente los conjuntos  $E_\alpha$  manifiestan propiedades características de los conjuntos fractales, en cuyo caso se dice que  $\mu$  es una distribución multifractal y el soporte se puede expresar como la unión de estos conjuntos[1]

$$E = \bigcup_{\alpha} E_{\alpha} \quad (1.19)$$

El *espectro de singularidades*  $f(\alpha)$  asociado a la medida  $\mu$  es la función que representa la dimensión fractal de cada  $E_\alpha$ , es decir, la función que a

todo exponente de singularidad  $\alpha$  le asocia la dimensión de Hausdorff del conjunto de los puntos  $x$  tales que  $\alpha(x) = \alpha$

$$f(\alpha) = \dim_H(\{x \in E \mid \alpha(x) = \alpha\}) \quad (1.20)$$

Si escribimos la relación (1.18) en la forma  $\mu(B_x(\delta)) \propto \delta^{\alpha(x)}$ , ésta nos indica que el número  $\alpha$  caracteriza la *fuerza* de la singularidad de la medida en el punto  $x$ . Por ejemplo, si  $\mu$  es una distribución de Dirac en el origen, se tiene que  $\alpha(0) = 0$ , mientras que si  $\mu$  es una distribución gaussiana,  $d\mu \propto e^{-x^2/2}dx$ , entonces  $\alpha(0) = 1$ . El espectro de singularidades describe el reparto de los exponentes de Holder sobre el soporte de la medida  $E$ . De este modo, si

se recubre el soporte con intervalos de longitud  $\delta$ , entonces el número de intervalos  $N_\alpha(\delta)$  para los que la medida varía como  $\delta^\alpha$  para un  $\alpha$  dado, satisface la relación

$$N_\alpha(\delta) \propto \delta^{-f(\alpha)} \quad (1.21)$$

o dicho de otro modo,  $f(\alpha)$  indica los *pesos* respectivos de las diferentes singularidades de la medida.

Una medida se dice que es *homogénea* si su espectro de singularidades se reduce a un punto. En estas circunstancias la medida se caracteriza

por una única singularidad. Se suele hablar también de *medida monofractal* u *homogénea* para indicar que las propiedades de invariancia de escala son las mismas en todas partes. En cambio, si  $f(\alpha)$  tiene un soporte finito, la medida no es homogénea y el exponente  $\alpha(x)$  cambia de un punto a otro, se habla entonces de *medida multifractal*.

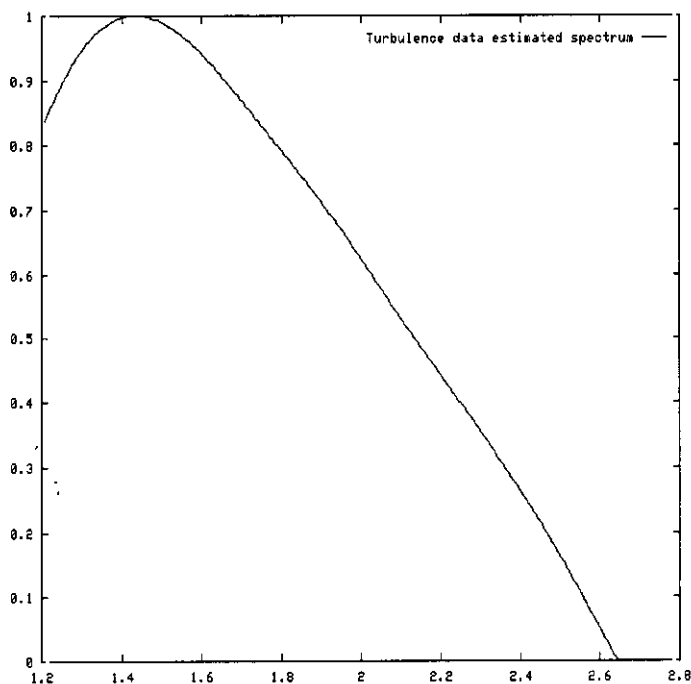


Figura 1.11: Espectro de singularidades  $f(\alpha)$  para la medida de la figura 1.10.

### 1.3.2 Análisis de la multifractalidad

Consideremos una medida  $\mu$  definida en  $\mathfrak{R}$ . Supongamos que existe un recubrimiento de  $\mathfrak{R}$  a base de intervalos de longitud  $\delta$   $\{B_i(\delta)\}_i$ , y que  $N(\delta)$  es el número de estos intervalos en los que la medida es no nula, es decir

$$\mu_i(\delta) = \int_{B_i(\delta)} d\mu \neq 0 \quad (1.22)$$

Para  $q \in \mathfrak{R}$  se define la *función de partición*

$$Z(q, \delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^q(\delta) \quad (1.23)$$

Estudiando el comportamiento de la función de partición  $Z$  con respecto al tamaño de los intervalos del recubrimiento (resolución) se llega a que

$$Z(q, \delta) \propto \delta^{\tau(q)} \quad (1.24)$$

donde la función  $\tau(q)$  se suele denominar también  *$\tau$ -espectro multifractal*. Se define asimismo el denominado *espectro de dimensiones fractales generalizadas* o también *dimensión de Renyi*[16] por la ecuación<sup>7</sup>

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (1.25)$$

Este nombre se le da debido a que

- $D_0$  es la dimensión BC del soporte de la medida.
- $D_1$  es la denominada *dimensión de información*<sup>8</sup>  $D_I$ .

---

<sup>7</sup>La dimensión generalizada  $D_q$  se corresponde con los exponentes del escalamiento de los momentos de orden  $q$  de la medida por medio de la expresión

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i \mu_i^q(\delta)}{\log \delta}$$

<sup>8</sup>La dimensión de información se define en términos de la *entropía de información*  $S(\delta)$ , definida para un  $\delta$ -recubrimiento como

$$S(\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i(\delta) \log_2 \left( \frac{1}{\mu_i(\delta)} \right)$$

De este modo, la dimensión de información es

$$D_I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S(\delta)}{-\log_2(\delta)}$$

la cual describe como crece la *información de Shannon*[16] o grado de aleatoriedad de una distribución cuando el recubrimiento del soporte se hace más fino.

- $D_2$  es la llamada *dimensión de correlación*, la cual mide el exponente de escalado de la autocorrelación de la distribución de la medida  $\mu$ .

Especial interés tienen los límites  $D_{-\infty}$  y  $D_{+\infty}$ , ya que  $\tau(q)$  está dominada por los valores más pequeños de la medida cuando  $q \rightarrow -\infty$  y por los mayores cuando  $q \rightarrow +\infty$ .

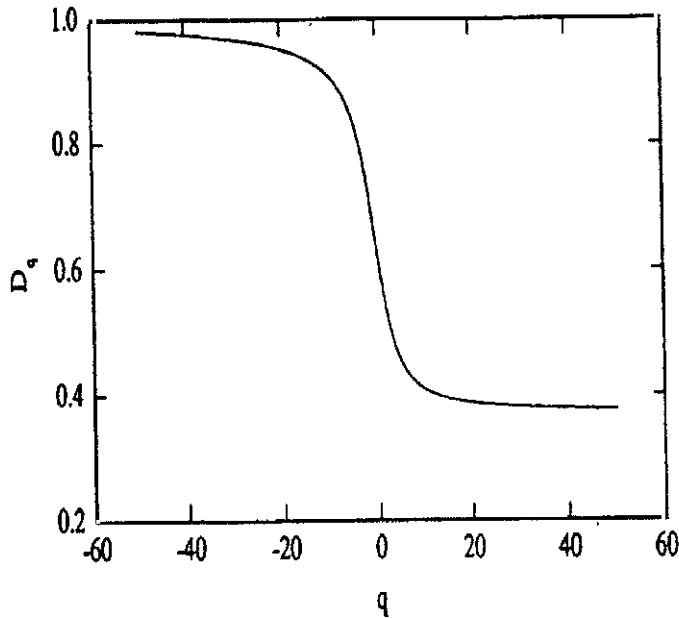


Figura 1.12: *Dimensión de Renyi para un conjunto multifractal de Cantor (de [1]).*

Contrariamente a los exponentes  $\alpha(x)$ , los exponentes  $\tau(q)$  describen el comportamiento de la función de partición  $Z(q, \delta)$ , la cual es una cantidad *global* que se puede considerar como una medida de los valores medios sobre el soporte, por ello es de esperar que sea mucho más sencillo estimar en la práctica  $\tau(q)$  que la función  $f(\alpha)$ . Sin embargo, ambas cantidades se relacionan por medio de

$$\tau(q) = \min_{\alpha} [q\alpha - f(\alpha)] \quad (1.26)$$

$$f(\alpha) = \min_q [q\alpha - \tau(q)] \quad (1.27)$$

lo cual define una *transformación de Legendre* entre  $\tau(q)$  y  $f(\alpha)$ . Si  $\tau(q)$  tiene derivada continua, se tiene que

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (1.28)$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \quad (1.29)$$

Como propiedades a destacar de las funciones  $\tau(q)$  y  $f(\alpha)$  podemos decir[1, 16, 26]

- Para  $q = 0$  se tiene que  $D_0 = -\tau(0) = \max_{\alpha} f(\alpha)$ , es decir, la dimensión BC del soporte de la medida  $D_0$  corresponde al máximo de la curva  $f(\alpha)$ . Dicho de otro modo,  $f(\alpha)$  alcanza su máximo para un valor de  $\alpha$  que corresponde a la singularidad más *frecuente*. La denotaremos por  $\alpha(0) = \alpha(q) |_{q=0}$ .
- Para  $q = 1$  se tiene que  $\tau(1) = \min_{\alpha} [\alpha - f(\alpha)] = \alpha(1) - f(\alpha(1))$ . Si la medida está normalizada en el sentido de que  $Z(1, \delta) = \sum_i \mu_i(\delta)$  es independiente de  $\delta$ , entonces  $\tau(1) = 0$  y por tanto  $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$ , de modo que  $f(\alpha)$  está siempre por debajo de la bisetriz  $f(\alpha) = \alpha$ . Las singularidades de intensidad  $\alpha(1)$  son las más probables en el sentido de la medida  $\mu$ .
- Para  $q = \pm\infty$  se obtiene que  $D_{-\infty} = \alpha_{max}$  y  $D_{+\infty} = \alpha_{min}$ , lo que, como ya se dijo más arriba, caracteriza respectivamente las zonas más rarefichadas y más densas de la medida  $\mu$ .

### 1.3.3 Estimación práctica del espectro multifractal

La manera habitual de estimar el espectro multifractal de una medida  $\mu$  consiste en el cálculo de la función  $\tau(q)$  y la aplicación posterior de la transformada de Legendre para obtener  $f(\alpha)$ . Sin embargo, este método<sup>9</sup> presenta numerosos problemas prácticos que dependen de factores como el número de datos, errores numéricos, etc, que suponen un serio impedimento a la obtención de resultados útiles en la práctica. Además se encuentra el problema adicional de evaluar una transformada de Legendre con la consiguiente introducción adicional de incertidumbres. Se pueden evitar en gran medida estos inconvenientes calculando directamente  $f(\alpha)$  a partir de la función de partición. Si  $Z(q, \delta)$  es la función de partición asociada a la medida

<sup>9</sup>Este procedimiento también se denomina frecuentemente *método de los momentos*.



$\mu$ , entonces se define la  $q$ -medida<sup>10</sup>

$$\mu_i(q, \delta) = \frac{\mu_i^q(\delta)}{\sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^q(\delta)} = \frac{\mu_i^q(\delta)}{Z(q, \delta)} \quad (1.30)$$

la cual a veces se denomina *distribución paralela*<sup>11</sup>. Puede demostrarse que tanto  $\alpha$  como  $f(\alpha)$  se pueden evaluar mediante las ecuaciones

$$\alpha(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\log \delta} \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i(q, \delta) \log \mu_i(\delta) \quad (1.31)$$

$$f(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\log \delta} \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i(q, \delta) \log \mu_i(q, \delta) \quad (1.32)$$

Vemos que  $\alpha(q)$  es el límite del valor medio ponderado con  $\mu_i(q, \delta)$  de los exponentes de Holder de todos los intervalos del soporte de la medida. Eliminando  $q$  entre  $f(q)$  y  $\alpha(q)$  se obtiene la función  $f(\alpha)$  buscada[16].

### 1.3.4 Modelos multifractales deterministas

Podemos generar una familia de medidas singulares con propiedades de

multifractalidad si se utiliza un modelo generico denominado *cascada multiplicativa*[1] con reglas deterministas en la secuencia de pasos a efectuar. Genericamente se trata de un modelo multiplicativo que parte de una medida  $\mu$  uniformemente distribuida sobre el soporte, considerado habitualmente como el intervalo  $[0, 1]$ .

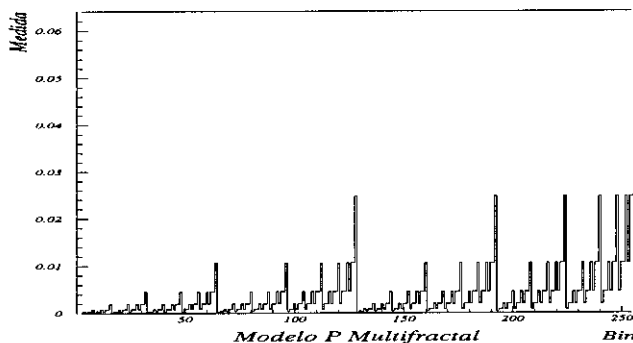


Figura 1.13: Medida multifractal generada con el modelo  $p$ -binomial con  $p = 0.3$  para  $n = 8$  pasos.

La medida del soporte completo  $\mu([0, 1]) = 1$  se toma inicialmente normalizada. En la primera etapa de la cascada,  $n = 1$ , se parte el

<sup>10</sup>Recordemos que  $\mu_i(\delta) = \mu(B_i(\delta))$ , siendo  $B_i(\delta)$  un intervalo de tamaño  $\delta$ .

<sup>11</sup>Al igual que ocurre con la dimensión de Renyi  $D_q$ , el parámetro  $q \in \mathbb{R}$  distingue entre las regiones del soporte según los valores que tome la medida. Para  $q > 1$  se resaltan las regiones de mayor intensidad, mientras que para  $q < 1$  son las de menor valor de la medida las que se acentúan. Para  $q = 1$ , claramente se obtiene la medida  $\mu$  normalizada.

soporte en dos intervalos iguales y se reparte la medida entre ellos con arreglo a una ley determinista, por ejemplo al trozo izquierdo se le da una fracción  $p$  de la medida inicial y por tanto su medida será ahora  $\mu_0 = p$ . Al trozo derecho se le da la fracción restante por lo que su medida será  $\mu_1 = 1 - p$ . El proceso se repite dividiendo cada subintervalo en otros dos, repartiendo la medida con la misma regla determinista. Se obtienen así segmentos cada vez más pequeños que contienen menos cantidad de la medida total. Para la tercera generación, por ejemplo, tendríamos un número  $N(\delta = 2^{-3}) = 2^3$  de intervalos de tamaño  $\delta = 2^{-3}$  en los que la medida valdría

$$\{\mu_i\}_{i=0}^{2^3-1} = \{\mu_0\mu_0\mu_0, \mu_0\mu_0\mu_1, \mu_0\mu_1\mu_0, \mu_0\mu_1\mu_1, \mu_1\mu_0\mu_0, \mu_1\mu_0\mu_1, \mu_1\mu_1\mu_0, \mu_1\mu_1\mu_1\}$$

La medida obtenida por este procedimiento, llamado *modelo  $p$  determinista* o *modelo binomial*<sup>12</sup>, posee un espectro de singularidades que puede estimarse si se considera que en la etapa  $n$ -ésima hay  $C_n^m$  intervalos de longitud  $2^{-n}$  para los que la medida vale  $\mu = \mu_0^{n-m}\mu_1^m$ , donde  $0 \leq m \leq n$ . Puede probarse entonces que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\ln \mu_0 + (n/m - 1) \ln \mu_1}{(n/m) \ln(1/2)} \\ f(n/m) &= \frac{(n/m - 1) \ln(n/m - 1) - (n/m) \ln(n/m)}{(n/m) \ln(1/2)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Eliminando  $n/m$  entre las dos expresiones se obtiene inmediatamente la  $f(\alpha)$ . Puede comprobarse que cualesquiera que sean los valores de  $p$  y  $1 - p$  la función  $f$  toma su valor máximo para  $n/m = 2$  el cual es  $f = 1$ . El máximo de la curva  $f(\alpha)$  corresponde a la dimensión fractal del soporte de la medida [1, 14, 16]. La figura 1.14 muestra el espectro de singularidades del modelo binomial para  $n = 16$  comparándolo con la curva que resultaría con un número ilimitado de generaciones.

Este modelo simple, con reglas deterministas, puede servir de base a modelizaciones mucho más sofisticadas, si el reparto de medida en cada etapa se realiza mediante un procedimiento aleatorio. Las medidas así obtenidas gozarán de propiedades multifractales en un sentido estadístico[14, 28].

## 1.4 Fractales estocásticos

Cuando en la construcción de un modelo fractal interviene de una u otra manera una variable aleatoria, decimos que se trata de un *fractal estocástico*. La estocasticidad puede intervenir de manera simple dando lugar a variantes

<sup>12</sup>Este modelo fue ideado por Meneveau y Sreenivasan[27] para intentar modelar procesos de reparto de energía en dinámica de fluidos en régimen turbulento.

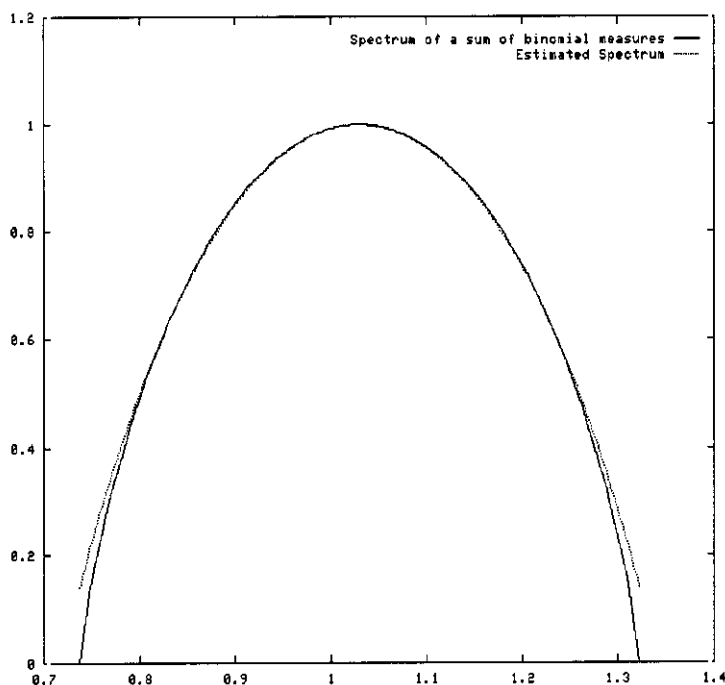


Figura 1.14: Comparación entre el espectro de singularidades de la medida binomial para  $n = 16$  con el espectro teórico.

de los modelos deterministas estudiados en la sección §1.2. Así, por ejemplo, si en la construcción de la curva de Von Koch regular permitimos que una variable aleatoria decida si poner el triángulo derecho o invertido, como se muestra en la figura 1.15, podremos modelar mucho mejor perfiles costeros conservando las propiedades esenciales de autosimilaridad y escalado. La dimensión fractal de estas curvas será la misma que la de su homóloga regular, aunque ya no será posible, en general, calcularla más que con procedimientos numéricos que involucren ajustes lineales sobre gráficas log-log. Puede obtenerse también una gama infinita de fractales asociando leyes de probabilidad con la construcción del conjunto de Cantor o el triángulo de Sierpinsky, pero donde se alcanza un grado de sofisticación notable es en los procesos estocásticos con estructura fractal. Esencialmente vamos a ver dos modelos denominados **aditivo** y **multiplicativo**, que dan lugar a dos familias de (multi)fractales que pueden modelizar procesos estocásticos complejos.

1.4.1 Procesos estocásticos fractales

Cuando, mediante alguna prescripción en la que intervienen variables aleatorias, construimos una función, ésta puede ser considerada como una *realización* concreta de un proceso estocástico definido por la secuencia de variables aleatorias que se asocian a los puntos del soporte de la función donde esta se muestrea[29, 30]. El proceso está definido por el conjunto de todas sus realizaciones lo mismo que una variable aleatoria lo está por el

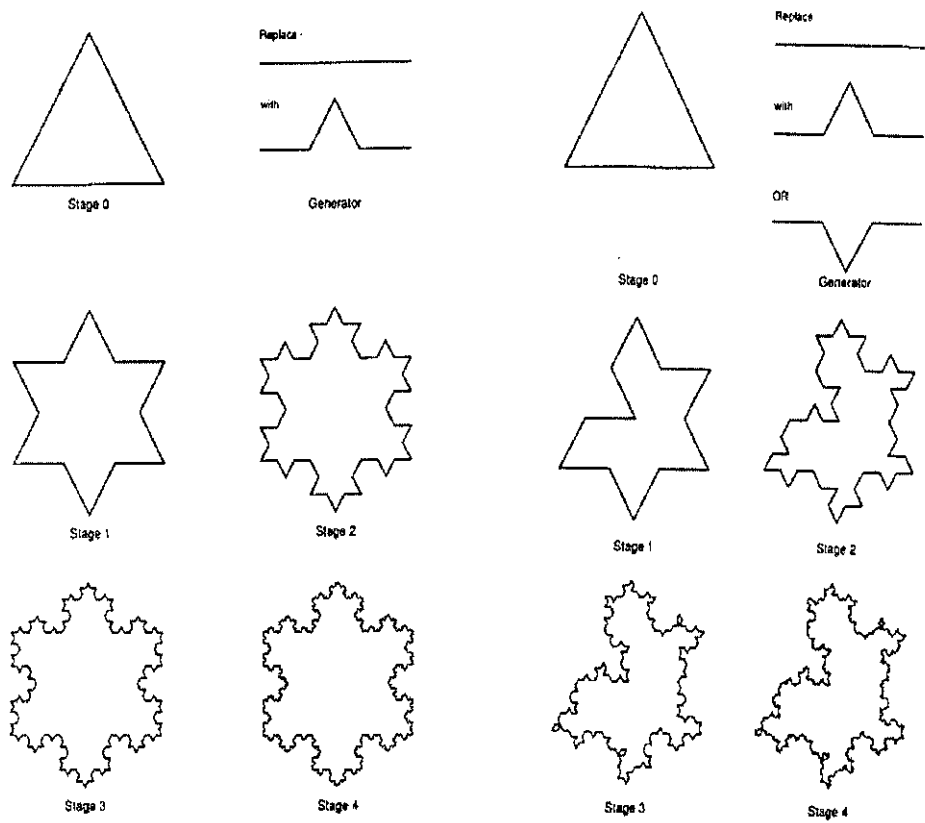


Figura 1.15: Construcción de la isla de Koch regular y de su homóloga estocástica.

conjunto de los valores posibles que puede tomar. Las propiedades de este tipo de objetos son de naturaleza estadística, ya que no se puede hablar de

grafo del proceso<sup>13</sup>, puesto que este cambia de una realización a otra. En cambio sí tiene sentido hablar de momentos estadísticos y de correlaciones entre las variables aleatorias asociadas al proceso<sup>14</sup>. Son precisamente estas correlaciones, generalmente a dos variables, las que caracterizan la fractalidad del proceso, puesto que, como se verá, las leyes de escalado que aparecen, indican la ausencia de una *longitud de correlación* característica, es decir, estos procesos son estadísticamente similares tanto si se observan a gran escala como a pequeña escala.

En muchas ocasiones las situaciones reales imponen que no se pueda muestrear más que un número finito de realizaciones del proceso estocástico o aún peor, más frecuentemente de lo deseable sólo se dispone de una realización del proceso. En estos casos suele hacerse la hipótesis de **ergodicidad** del proceso, la cual admite que cualquier realización del proceso contiene toda la información esencial del proceso mismo, es decir, los parámetros estadísticos del proceso se pueden estimar calculando promedios sobre la realización y no es necesario hacerlo sobre la colectividad de realizaciones. Ciertamente, la ergodicidad restringe severamente la clase de procesos que pueden ser analizados de este modo, pero, a falta de algo mejor o de más información, resulta en muchas ocasiones una buena aproximación de la realidad.

Las funciones fractales aleatorias que, como sabemos ahora, son sólo realizaciones de un proceso estocástico, se denominan comunmente en la literatura *ruidos fractales* y es frecuente encontrarlos asociados al estudio de sistemas no lineales en los que la respuesta, se supone, obedece a un modelo  $y(x) = s(x) + n(x)$  donde  $y(x)$  es la respuesta real del sistema,  $s(x)$  es la *señal* o respuesta teórica y  $n(x)$  se denomina ruido contaminante. La señal puede representar la relación entre dos magnitudes medibles o la evolución temporal o espacial de alguna otra, mientras que el ruido representa habitualmente las incertidumbres asociadas con el proceso de medición. En la mayor parte de las ocasiones suelen aplicarse los *modelos de regresión* para determinar la forma funcional aproximada de la señal bajo ciertas hipótesis exigidas al ruido contaminante. Si el ruido va a representar incertidumbres se exige que :

- Tenga valor medio nulo y varianza constante.
- Sea un ruido no correlacionado, es decir, un **ruido blanco**.
- Provenga de una distribución Normal.

---

<sup>13</sup>Aunque sí puede hablarse del grafo de una realización concreta.

<sup>14</sup>Los procesos estocásticos con  $n$  variables, quedan en general definidos por sus estadísticas de orden  $n$ . Se habla de estadística de  $n$ -orden para referirse a la distribución conjunta de  $n$  variables aleatorias[29, 30].

Sin embargo, si el ruido posee una estructura de correlación compleja, ya no podrá representar simplemente incertidumbres. El ruido contiene información esencial sobre el sistema que el modelo de regresión aplicado es incapaz de incorporar[31, 32, 33]. Es entonces cuando se habla de ruido fractal para referirse bien a  $n(x)$  o a  $y(x)$ , según que se haya extraído o no la parte esencial de la señal real que presenta este comportamiento. Ejemplos de tales señales son el ruido  $1/f$ [34, 4] o *ruido rosa*, muy relacionado con este trabajo, el ruido  $1/f^2$ , también llamado *ruido marrón* o más frecuentemente *ruido browniano*[1, 14, 4, 28, 35].

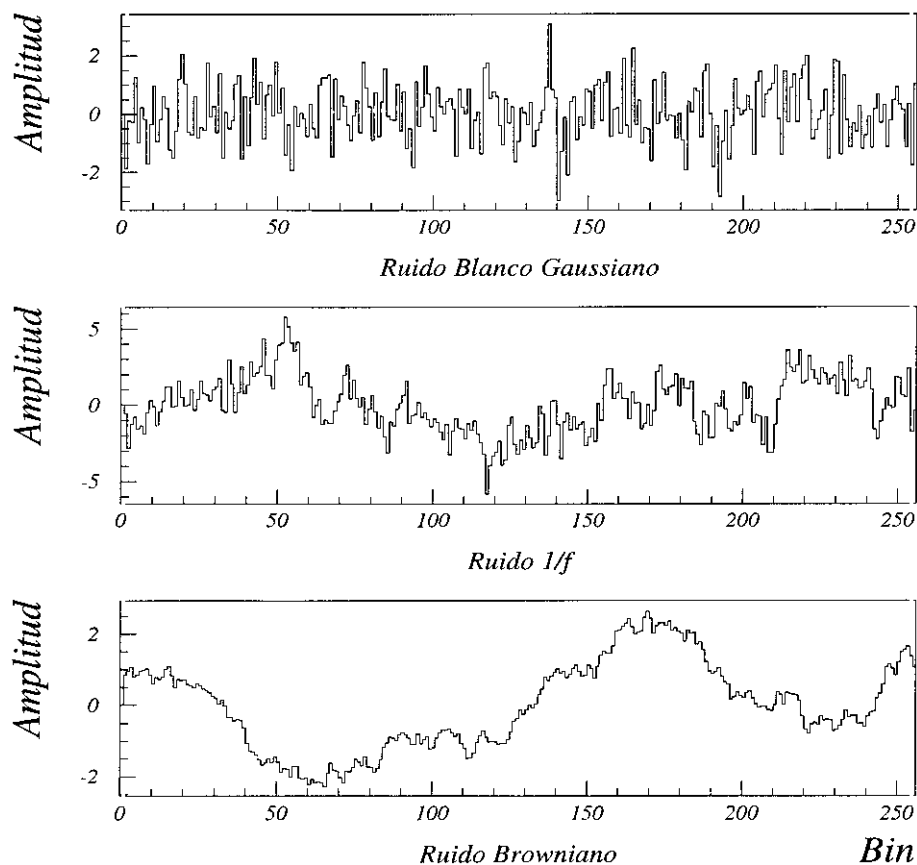


Figura 1.16: Algunos ejemplos de ruidos.

El paradigma de función fractal aleatoria es la trayectoria de una partícula browniana. Descubierto en 1827 por R. Brown, fué bautizado como movi-

miento browniano (mB). Esta complicada danza compuesta de una sucesión de pasos de longitud y dirección aleatorias, no encontró la debida explicación hasta 1905 con A. Einstein dentro del marco de la teoría cinética de los gases. Esto permitió después a Perrin calcular el número de Avogadro, obteniendo por ello el Premio Nobel. En 1923 Wiener construye un modelo matemático de tipo aleatorio que describe el mB con precisión satisfactoria. La trayectoria browniana es continua, pero sus cambios constantes y bruscos de dirección son causa de su no diferenciabilidad, como ocurre con la curva de Von Koch. Sin embargo la regularidad del mB es de naturaleza diferente a la que posee dicha curva. En este caso existe una regularidad de tipo estadístico que permite clasificarlo como fractal aleatorio. Dicha regularidad se manifiesta, por ejemplo, en que el valor medio del cuadrado de la longitud del desplazamiento, *varianza del desplazamiento*, que experimenta la partícula browniana es proporcional al tiempo invertido en el desplazamiento, es decir

$$\langle |X(t + \tau) - X(t)|^2 \rangle = \sigma^2 \tau \quad (1.34)$$

donde  $X(t)$  es la posición de la partícula browniana en el instante  $t$ . El mB es un ejemplo de fractal con autosemejanza **de tipo estadístico**, lo cual

significa que dos trozos arbitrarios de trayectoria browniana, son estadísticamente semejantes. Esto significa que las variables aleatorias que definen estas trayectorias son indistinguibles desde el punto de vista estadístico. En la figura 1.17 se puede ver el grafo de un mB desarrollado en el plano. Dicho grafo corresponde al tipo de curvas que, como la de Peano, llenan el plano. Por ello, la dimensión fractal de la trayectoria plana de

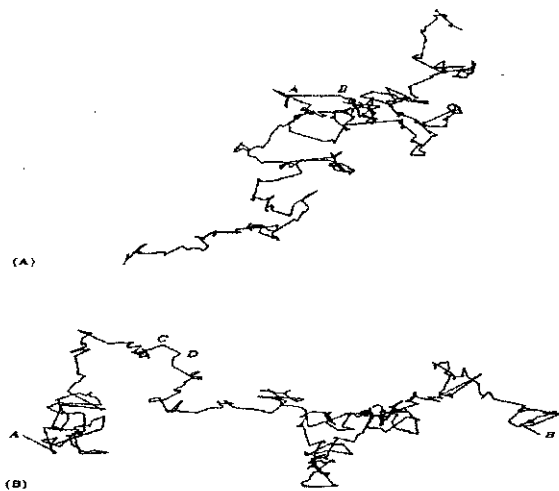


Figura 1.17: (A) Trayectoria en el plano de una partícula browniana a una cierta resolución. (B) Tramo A-B ampliado considerando una resolución aún mayor.

un mB es<sup>15</sup>  $D_g = 2$ . La importancia teórica del mB se pone de manifiesto en que pertenece a una clase muy importante de procesos aleatorios con propiedades fractales denominados genericamente **paseos aleatorios** (random walk) y que son un ejemplo muy ilustrativo de una clase de procesos estocásticos denominados **aditivos**, puesto que son el resultado de sumar variables aleatorias. Merece la pena analizar con cierto detalle las características esenciales del mB.

Consideremos una partícula que se mueva sobre una línea ( el eje x por ejemplo) saltando una longitud  $\xi$  cada  $\tau$  segundos. El salto se considerará como una variable aleatoria distribuida según una densidad gaussiana

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}} \quad (1.35)$$

De este modo, a intervalos de tiempo  $\tau$  se elige aleatoriamente un salto  $\xi$  según la ley probabilística cuya densidad es la anterior. La posición de la partícula en el instante  $t = n\tau$ , donde  $n$  es un entero correspondiente a  $n$  saltos, es<sup>16</sup>

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (1.36)$$

La secuencia de saltos  $\{\xi_i\}_{i=1,n}$  es un conjunto de  $n$  variables aleatorias gaussianas independientes. La varianza del proceso, por tener media cero, es

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2D\tau \quad (1.37)$$

y en consecuencia  $\langle X^2 \rangle = 2D\tau n = 2Dt$ . El parámetro  $D$  se denomina habitualmente coeficiente de difusión. La ley seguida por la varianza se mantiene válida bajo condiciones muy generales, incluso si los saltos no tienen lugar a intervalos regulares de tiempo o cuando la ley probabilística es discreta o, aún siendo continua, obedece a otra función densidad. La figura 1.18 muestra la posición de la partícula en función del tiempo. En el límite de pequeños tiempos la posición  $X(t)$  es una función aleatoria cuyo grafo se denomina **realización** de la función aleatoria. Este grafo se denominara función browniana  $B(t)$  siguiendo a Mandelbrot. Como en la práctica no se observa el mB con resolución infinita en tiempos, tenemos que considerar la observación de la posición de la partícula a intervalos  $b\tau$ , siendo  $b$  un número arbitrario. Si observáramos la posición de la partícula cada  $b\tau$ , el

<sup>15</sup>La dimensión fractal  $D_g$  es la dimensión del grafo de la función  $X(t)$ .

<sup>16</sup>El Teorema Central del Límite nos asegura que la suma (1.36) tiende a  $\sqrt{n}\xi$ .



incremento  $\xi$  en la posición de la partícula tendría lugar con una distribución de probabilidad dada por

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Db\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4Db\tau}} \quad (1.38)$$

y la varianza de los incrementos sería

$$\langle \xi^2 \rangle = 2Db\tau \quad (1.39)$$

Este resultado indica que el mB parece el mismo bajo un cambio en la resolución de observación. Esta propiedad se denomina *invariancia de es-*

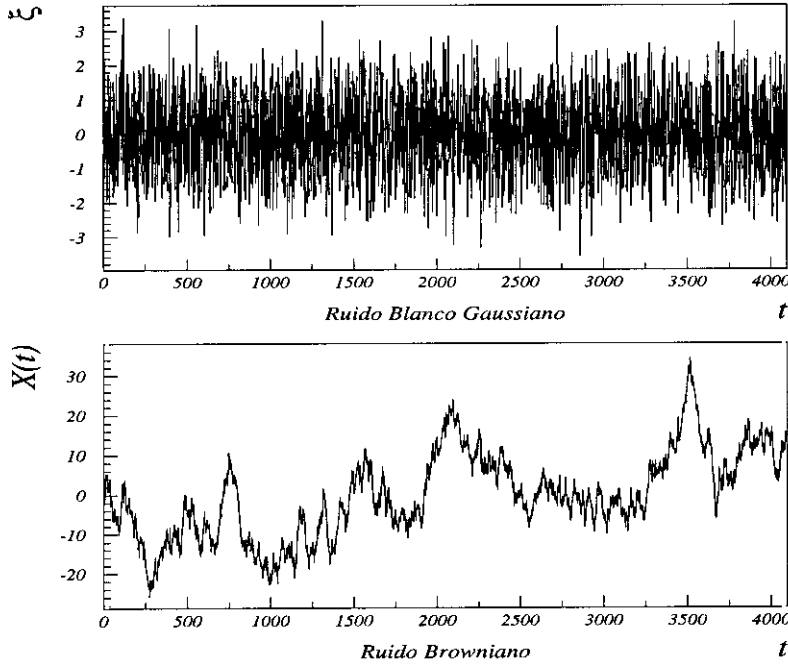


Figura 1.18: (a) Variable aleatoria Normal. (b) Desplazamiento de la partícula browniana con arreglo a (1.36).

*cala.* Efectuando un cambio de escala en la ley de la probabilidad  $\xi' = b^{1/2}\xi$  y  $\tau' = b\tau$ , se encuentra que

$$p(\xi' = b^{1/2}\xi, \tau' = b\tau) = b^{-1/2}p(\xi, \tau) \quad (1.40)$$

donde el prefactor  $b^{-1/2}$  asegura la correcta normalización de la densidad de probabilidad. La ecuación anterior muestra que este proceso aleatorio

es **invariante** bajo una transformación que cambia la escala temporal en  $b$  y la escala de longitudes en  $b^{1/2}$ . Este tipo de transformaciones se suelen denominar *afines* y toda curva que se asemeja a sí misma bajo transformaciones afines se denomina *autoafín*<sup>17</sup>. La distribución de probabilidad para la posición de la partícula  $X(t)$  (no olvidemos que  $X(t)$  es la suma de incrementos aleatorios independientes) es también gaussiana, satisfaciendo una ley de invarianza por transformaciones afines similar a la encontrada para

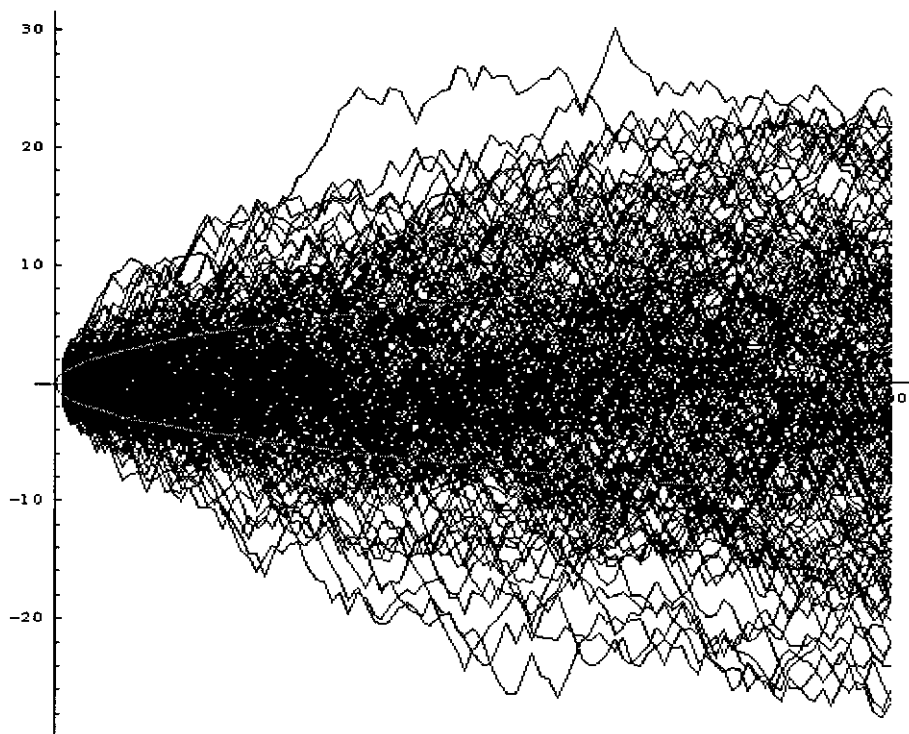


Figura 1.19: Representación conjunta de varias realizaciones de un movimiento browniano unidimensional mostrando las propiedades reflejadas en (1.43).

los incrementos mismos

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D|t - t_0|}} e^{-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4D|t - t_0|}} \quad (1.41)$$

$$P(b^{1/2}[X(bt) - X(bt_0)]) = b^{-1/2}P(X(t) - X(t_0)) \quad (1.42)$$

<sup>17</sup>La autoafinidad es un concepto más relajado de autosimilaridad que implica invariancia bajo la acción de transformaciones afines (dilataciones anisótropas), en contraposición a la invariancia por semejanzas isotrópicas que conduce a la autosimilaridad.

Con esta distribución de probabilidad para la posición de la partícula, el valor medio y la varianza de  $X(t)$  son

$$\langle |X(t) - X(t_0)| \rangle \sim |t - t_0|^{1/2} \quad (1.43)$$

$$\langle X(t) - X(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \langle |X(t) - X(t_0)|^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X \\ &= 2D|t - t_0| \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde  $X(t_0)$  es la posición de la partícula en algún instante  $t_0$  y  $\Delta X$  es el incremento en la posición de la partícula  $\Delta X = X(t) - X(t_0)$ .

Las anteriores consideraciones pueden ser generalizadas para definir un proceso aleatorio de tipo fractal denominado **Movimiento Browniano Fraccional** (mBf), denotado por  $B_H(t)$ . Siguiendo a Mandelbrot el mBf es un proceso aleatorio cuyo grafo es  $B_H(t)$  y que satisface

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0 \quad (1.46)$$

$$\langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle \propto |t - t_0|^{2H} \quad (1.47)$$

El número  $H$  se denomina a veces *exponente de Hurst* y vale  $H = 1/2$  para el mB ordinario. Se observa que tanto para el mB como para el mBf las varianzas divergen con el tiempo (escala de observación temporal). Además hay que constatar que en el mBf hay correlaciones de largo alcance entre los incrementos o saltos de posición. En efecto, definiendo la correlación normalizada  $\rho$  entre incrementos sucesivos por

$$\rho = \frac{\langle \xi_1 \xi_2 \rangle}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \quad (1.48)$$

donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son los incrementos y  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las varianzas respectivas, se encuentra que  $\rho$  no depende de la escala de observación temporal, siendo su valor

$$\rho = 2(2^{2H-1} - 1) \quad (1.49)$$

Notemos primero que para el mB ordinario no existe correlación entre incrementos sucesivos, lo que exige la definición de proceso aleatorio independiente. Sin embargo, para  $H \neq 1/2$  existe correlación aunque ésta no depende del tamaño del paso temporal. Esto conduce a los fenómenos de **persistencia** y **antipersistencia**. Para  $H > 1/2$  tenemos persistencia. En este caso, si tenemos un incremento positivo en algún momento del pasado, entonces tendremos en promedio un crecimiento en el futuro. Por tanto, una

tendencia al crecimiento en el pasado implica una tendencia al crecimiento en el futuro en procesos con  $H > 1/2$  y esta conclusión se aplica para tiempos arbitrariamente largos. Recíprocamente, una tendencia al decrecimiento en tiempos pasados conlleva esa misma tendencia en el futuro. Para pro-

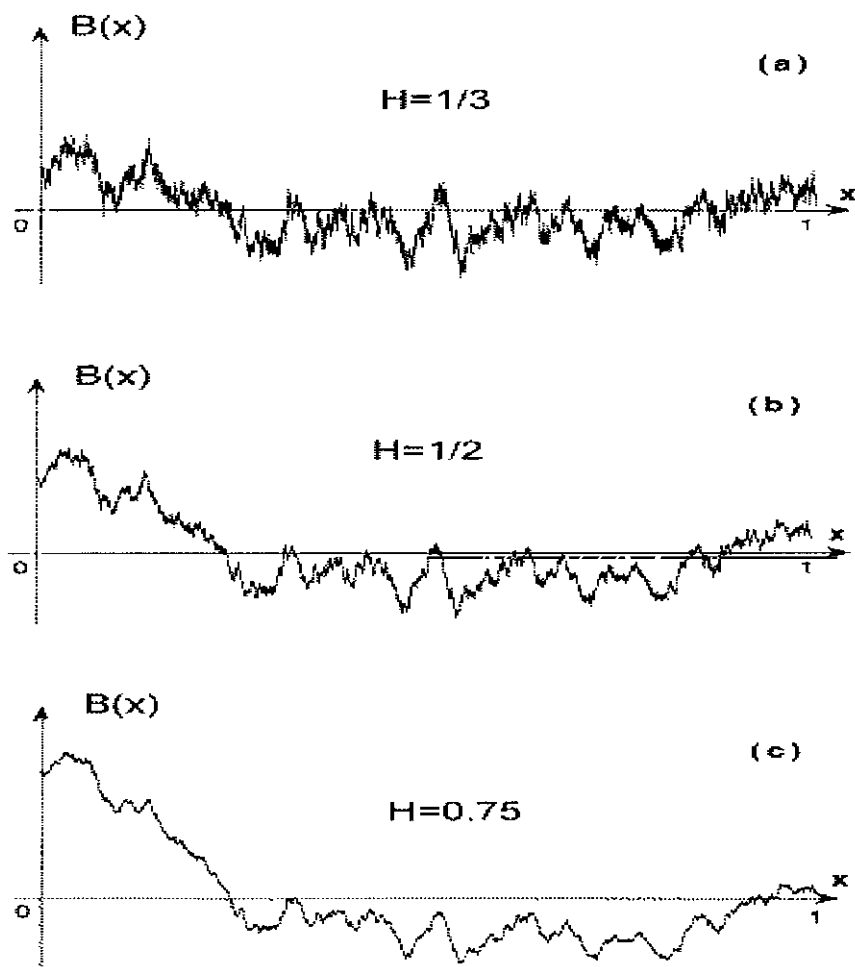


Figura 1.20: Tres muestras de movimientos brownianos fraccionales con  $H = 0.33$ ,  $H = 0.5$  y  $H = 0.75$ .

cesos con  $H < 1/2$ , una tendencia al crecimiento en el pasado implica una tendencia al decrecimiento en el futuro.

### 1.4.2 Técnicas de análisis

Como ya se ha mencionado, la naturaleza fractal de estos objetos que acabamos de describir es de tipo estadístico y por tanto es necesario extender los conceptos geométricos que conducen a la caracterización de la fractalidad al ámbito de la estadística. La autosimilaridad, o invariancia con la escala de observación/medición, es tal vez la característica más fácilmente extensible, pudiéndose definir en términos estadísticos que una función estocástica  $f$  es autoafín cuando al considerar los incrementos

$$\Delta f(\tau) = f(x + \tau) - f(x) \quad (1.50)$$

se cumple la siguiente ecuación

$$\Delta f(\lambda\tau) = \lambda^H \Delta f(\tau) \quad (1.51)$$

donde la igualdad anterior ha de ser entendida entre variables aleatorias, lo que significa que deben tener una distribución de probabilidad idéntica. Esta claro que el mB cumple con esta caracterización con  $H = 1/2$ . También es posible cuantificar apropiadamente la ausencia de longitudes de correlación características para un proceso estocástico fractal, si utilizamos la relación existente entre la *función de autocorrelación* de un proceso estocástico y su *densidad de energía espectral* (PSD, de Power Spectrum Density)[31, 29, 30, 32]. La función de autocorrelación  $R(t, t')$  y la PSD  $P(k)$  de un proceso estocástico  $x(t)$  se definen del siguiente modo

$$R(t, t + \tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle \quad (1.52)$$

$$P(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |X_T(k)|^2 \rangle}{2T} \quad (1.53)$$

donde  $X_T(k)$  es la transformada de Fourier de  $x(t)$  restringida al intervalo  $(-T, T)$ , es decir

$$X_T(k) = \int_{-T}^T x(t)e^{-jkt} dt \quad (1.54)$$

Para *procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio*<sup>18</sup> (WSS) se verifica que la función de autocorrelación sólo depende de la separación  $\tau$  y además,

<sup>18</sup>Un proceso estocástico se dice que es estacionario en sentido amplio (Wide Sense Stationary Processes) si son ciertas las siguientes condiciones:

- El promedio sobre las realizaciones  $\langle x(t) \rangle$  es constante para todo valor de  $t$ .
- La función de autocorrelación  $\langle x(t)x(t + \tau) \rangle$  no depende más que de  $\tau$ .

La no estacionaridad indica la presencia de *tendencias* en el comportamiento estadístico del proceso que es necesario eliminar, para así aislar lo esencial del proceso mismo[31, 32].

como la PSD y el promedio en  $t$  de  $R(t, t + \tau)$  forman un par de Fourier[30], es decir,

$$P(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle R(t, t + \tau) \rangle_t e^{-jk\tau} d\tau \quad (1.55)$$

se tiene que para este tipo de procesos WSS se verifica

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(k) e^{jk\tau} dk \quad (1.56)$$

De este modo, el conocimiento de la PSD  $P(k)$  permite recuperar la función de autocorrelación para procesos WSS[30, 31]. En el caso de procesos no estacionarios, sólo podremos recuperar el promedio en  $t$  de la función de autocorrelación  $\langle R(t, t + \tau) \rangle_t$ . Como en la realidad no disponemos de todas las realizaciones del proceso estocástico y además sólo muestreamos estas en un número finito de puntos, la estimación de la PSD se llevará a cabo en el intervalo de muestreo por medio de la relación  $P(k) \sim \langle |X(k)|^2 \rangle$ , evaluando  $X(k)$  mediante la transformada rápida de Fourier (FFT)[36] hasta la frecuencia de corte de Nyquist, relacionada con la resolución del muestreo de  $x(t)$ .

La identificación de una ley de potencias en la PSD del tipo  $P(k) \sim 1/k^\beta$  es condición necesaria, aunque no suficiente, para poder garantizar la autoafinidad estadística del proceso estocástico y, como consecuencia, su caracterización fractal[37, 38, 39]. Según el valor del exponente  $\beta$  tendremos una primera clasificación del proceso:

- Si  $\beta \leq 1$  el proceso es estacionario WSS. Además puede probarse fácilmente que la función de autocorrelación es  $R(\tau) \sim \tau^{\beta-1}$ , ley de potencias que indica la ausencia de una escala de correlación característica en el proceso y, por tanto, es signo de autoafinidad estadística.
- Si, en cambio,  $\beta > 1$ , el proceso no puede ser estacionario, pues de lo contrario daría lugar a una autocorrelación entre puntos creciente con la separación  $\tau$ <sup>19</sup>.

Para el mBf, el análisis de la PSD da lugar a que  $P(k) \sim 1/k^{2H+1}$ , con lo que  $\beta = 2H + 1$ . Para el caso del mB,  $H = 1/2$ , obteniéndose el conocido resultado  $\beta = 2$ . Esto indica que el mBf es un proceso no estacionario,

<sup>19</sup>Para un proceso estacionario  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R(\tau) = m^2$  siendo  $m = \langle x(t) \rangle$  e independiente de  $t$ .

aunque, según indica (1.47), posee *incrementos estacionarios*. En efecto, es fácil darse cuenta de que

$$\langle [B_H(t + \tau) - B_H(t)]^2 \rangle \propto \tau^{2H} \quad (1.57)$$

lo que significa que la variable aleatoria dependiente de  $t$

$$\Delta_\tau B_H(t) = B_H(t + \tau) - B_H(t) \quad (1.58)$$

que representa los incrementos de la posición de la partícula browniana, define un proceso estacionario, prueba de lo cual es que los dos primeros momentos son independientes de  $t$ .

Algunos autores sugieren que la autoafinidad de un proceso estocástico está relacionada con las propiedades de escalado de las denominadas <sup>20</sup> *funciones de estructura* del proceso [41, 42, 43].

$$\langle |x(t + \tau) - x(t)|^q \rangle \sim \tau^{\zeta(q)} \quad q \in \mathbb{R} \quad (1.59)$$

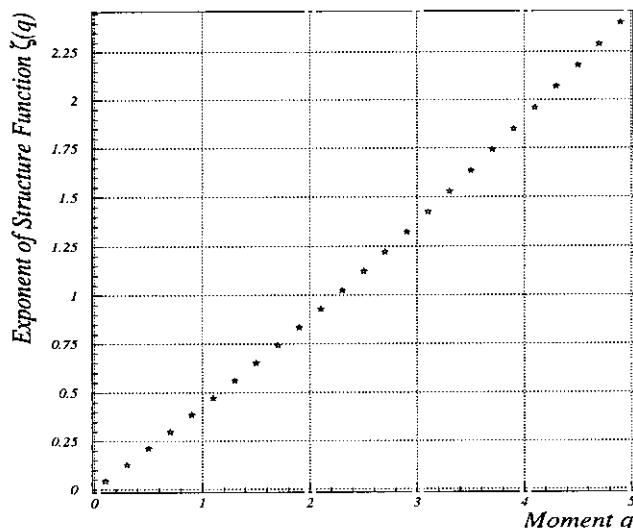


Figura 1.21: *Exponente de escalado de las funciones de estructura para el movimiento browniano (300 realizaciones) mostrando la linealidad de  $\zeta(q)$  con  $H \equiv 0.5$ .*

El exponente de escalado de las funciones de estructura suele encontrarse en la literatura en la forma  $\zeta(q) = qH(q)$ , siendo, por ejemplo,  $\zeta(q) = qH$  con  $H$  constante para el mBf. Cuando el exponente de escalado de las funciones de estructura  $\zeta(q)$  es una función lineal de  $q \in \mathbb{R}$ , decimos que el proceso estocástico es no estacionario y monofractal, siendo  $0 < H < 1$  el exponente característico de la invariancia de escala que satisface su estadística<sup>21</sup>. Para procesos

estacionarios *per se* y monofractales, la invariancia de escala puede

<sup>20</sup>La nomenclatura proviene del ámbito de la hidrodinámica y la geofísica [40].

<sup>21</sup>Formalmente  $H = 0$  sería indicativo de la estacionaridad de proceso  $x(t)$ .

caracterizarse con la ayuda del exponente de escalado de la función de autocorrelación, cuyo valor es  $\beta - 1$ , lo que sería equivalente a la estimación de la dimensión de correlación en los fractales *geométricos*.

### 1.4.3 Simulación de procesos aditivos

En §1.4.1 hemos visto uno de los procesos aditivos más conocidos, el mBf, cuya estadística viene caracterizada por el exponente  $H$ , siendo  $H = 0.5$  el caso correspondiente al mB ordinario. En estos procesos interviene una variable aleatoria gaussiana  $\xi$ , que, sumada para el mB, nos proporciona las realizaciones. Sin embargo, para el mBf, la suma ha de pesarse con coeficientes adecuados para conseguir el comportamiento correcto, pues debemos tener en cuenta que existe una correlación<sup>22</sup> entre incrementos sucesivos, dada por (1.49). El coeficiente  $H$  varía entre  $0 \leq H \leq 1$ , siendo  $H = 1/2$  el valor que corresponde al mB ordinario[1, 28].

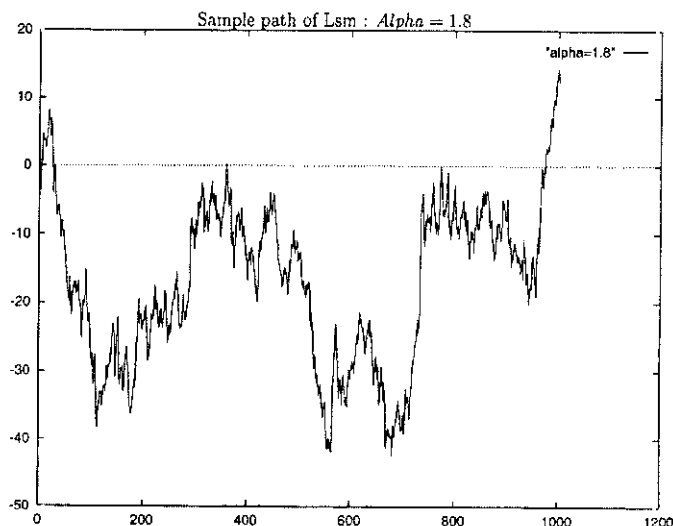


Figura 1.22: Una realización de un vuelo de Levy.

un ruido mBf de exponente  $H$ . La afirmación anterior lleva implícita la definición de una operación matemática denominada **integración fraccional**[44, 45], la cual representa una extensión de la integración ordinaria. Este con-

La simulación de estos procesos en los que se suman variables aleatorias gaussianas con o sin correlación, se ve facilitada enormemente si trabajamos en el espacio de Fourier. La operación que supone multiplicar por  $k^{-H-1/2}$  la transformada de Fourier de un ruido blanco, para después pasar de nuevo por la transformada inversa al espacio real, equivale, salvo constantes multiplicativas globales, a

<sup>22</sup>Se trata, en realidad, del coeficiente de correlación, el cual es una correlación normalizada con las varianzas.



cepto permite además extender el procedimiento de simulación de mBf con variables gaussianas  $\xi$  a otro tipo de variables más complejas, como por ejemplo las variables de Levy<sup>23</sup> de índice  $\alpha$ . El resultado se conoce en la literatura como *vuelo de Levy*[44], y se simula partiendo de un ruido blanco construido con estas variables, ruido blanco de Levy[29, 46], al que se le aplica una integración fraccional para *colorearlo* adecuadamente.

## 1.5 Medidas multifractales estocásticas

En los fractales estocásticos, descritos brevemente más arriba, se trataba de estudiar las propiedades de escalado de los momentos estadísticos de orden  $q \in \mathbb{R}$  de variables aleatorias no negativas,  $\Delta_\tau(t)$ , dependientes de la escala de observación  $\tau$ , y relacionadas (representativas) de una u otra forma con un proceso estocástico  $x(t)$

$$\langle \Delta_\tau(t)^q \rangle \propto \tau^{\zeta(q)} \quad (1.60)$$

de modo que el objetivo es determinar la familia de exponentes  $\zeta(q)$ . Si la cantidad  $\Delta_\tau(t)$  es estacionaria y se dispone de todas las posibles realizaciones del proceso, entonces (1.60) resultará independiente de  $t$ . Sin embargo, en la práctica, sólo se dispone, con mucha suerte, de unas pocas realizaciones siendo lo habitual disponer de una sola realización del proceso. En estos casos, la hipótesis de ergodicidad para el proceso nos permite estimar  $\zeta(q)$  mediante un promedio sobre la propia realización. Cuando se dispone de pocas realizaciones, es habitual combinar el promedio sobre la colectividad de realizaciones con un promedio sobre cada realización individual para así mejorar la estimación. Sin embargo, la elección de la cantidad representativa del proceso  $\Delta_\tau(t)$  es crítica. Para los ruidos fractales que son estacionarios de partida,  $\Delta_\tau(t) = x(t + \tau)x(t)$ , de modo que (1.60) para  $q = 2$  no es más que la función de autocorrelación, la cual escala como  $\tau^{\beta-1}$ , siendo  $\beta$  el exponente de escalado de la PSD  $P(k) \sim k^{-\beta}$ . En el caso no estacionario, como ocurre en el mBf,  $\Delta_\tau(t) = |x(t + \tau) - x(t)|$ , de manera que (1.60) representa ahora la ley de escala satisfecha por las funciones de estructura, donde es frecuente escribir  $\zeta(q) = qH(q)$ . La función  $H(q)$  depende del tipo de proceso en estudio. Para procesos propiamente estacionarios,  $H(q) = 0 \forall q$ , mientras que para procesos cuyas realizaciones son funciones continuas con derivada primera no nula y acotada<sup>24</sup>  $H(q) = 1$ , de manera que  $H(q)$  representa los diversos grados existentes de no estacionaridad, visualmente identificados con

<sup>23</sup>Para más detalles, véase el apéndice A de esta memoria.

<sup>24</sup>Téngase en cuenta que, en estas condiciones,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} x(t + \tau) - x(t) \rightarrow \tau$ .

una gradación en la irregularidad de las realizaciones. Para el mBf, como ya se dijo en §1.4.2,  $H(q) = H$ , lo cual implica que  $\langle |\Delta_\tau|^q \rangle \approx \langle |\Delta_\tau| \rangle^q$ , cuyo significado es que la distribución de probabilidad de la variable  $|\Delta_\tau|$  es lo bastante *estrecha* como para poder relacionar todos los momentos mediante un exponente de escalado sencillo<sup>25</sup>[42]

### 1.5.1 Invariancia de escala de las medidas

Para estudiar las propiedades estadísticas singulares de las *medidas*, hay que precisar que una medida unidimensional a escala  $\delta$  de una magnitud  $\epsilon(x)$  vendrá representada por el conjunto de valores  $\{\epsilon_\delta(x_i)\}_i$ , donde el índice  $i$  recorre el número de intervalos en los que se divide el soporte y además

$$\epsilon_\delta(x_i) = \frac{1}{\delta} \int_{x_i}^{x_i+\delta} \epsilon(x) h(x) dx \quad (1.61)$$

donde  $h(x)$  representa la acción del instrumento de medida sobre la propia medición. Habitualmente este esquema coincide con la medición promediada,  $h(x) = 1$ , de la magnitud, pero no siempre ocurre de este modo. Se dispone inicialmente, por tanto, de un conjunto de datos, medidas, a una resolución que llamaremos *máxima*, correspondiente a  $\delta_{min}$ . Repitiendo el proceso anterior, podremos obtener diferentes realizaciones de la medición, con lo que, en realidad, tenemos un proceso estocástico cuyas propiedades de invariancia respecto a la escala de medida  $\delta$  nos proponemos estudiar. Las medidas representan una secuencia de variables aleatorias no negativas en el mismo sentido que el visto en §1.4.2.

La invariancia de escala para las medidas se refiere al comportamiento de las variables aleatorias que las representan cuando variamos  $\delta$ , es decir, el tamaño de los intervalos donde efectuamos la medición de la magnitud. Esto presupone el conocimiento de las medidas a diferentes escalas, teniendo presente que nuestra disponibilidad de información se reduce a los valores de éstas a la resolución máxima. La obtención de las medidas a resolución  $\delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max}$  puede hacerse mediante *degradación*<sup>26</sup> de los datos iniciales[45, 47, 48]. El procedimiento para degradar desde una resolución  $\delta_{min}$  hasta otra

<sup>25</sup>Suele decirse que estas distribuciones son de *colas cortas* (short-tailed). Por ejemplo, las distribuciones gaussianas lo son.

<sup>26</sup>Este procedimiento se denomina *coarse graining*, obteniéndose un conjunto de datos que a veces se denominan *cantidades vestidas* (*dressed*) para distinguirlas de las *cantidades desnudas* (*bare*), que representan el verdadero valor de las medidas a la resolución considerada.

$\delta > \delta_{min}$  se realiza mediante promedios del tipo

$$\epsilon_\delta(x_i) = \frac{1}{\delta} \sum_{y_i=x_i}^{x_i+\delta} \epsilon_{\delta_{min}}(y_i) \quad (1.62)$$

obteniéndose otro conjunto de medidas a la resolución  $\delta$ . De nuevo es importante saber si el proceso estocástico es estacionario o no, ya que el análisis será muy diferente según se trate de un caso u otro. Suponiendo una situación estacionaria, al menos en sentido amplio WSS, la invariancia de escala se pone de manifiesto estudiando la ley de potencias

$$\langle \epsilon_\delta(x)^q \rangle \sim \delta^{-K(q)} \quad q \geq 0 \quad (1.63)$$

con la escala  $\delta$ . La función  $K(q)$  suele denominarse *exponente de escalado de los momentos estadísticos* y juega un importante papel en la caracterización de la estadística del proceso. Algunas de sus propiedades más importantes son:

- La función  $K(q)$  es convexa<sup>27</sup>, es decir  $\frac{d^2}{dq^2} K(q) \geq 0$ . La igualdad solo se alcanza cuando  $K(q)$  es lineal con  $q$ .
- Debido al carácter estacionario del proceso se tiene que  $K(0) = K(1) = 0$ , ya que corresponderían a los exponentes de escalado de la norma y de la media de la estadística de primer orden.
- Entre  $0 < q < 1$  se tiene que  $K(q) < 0$ , lo que refleja el hecho de que tomando la potencia  $q$ -ésima se reducen las fluctuaciones. Por el contrario, si  $q \geq 1$ , debemos tener  $K(q) > 0$ .
- Es fácil ver que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \epsilon_\delta(x)^q \rangle \rightarrow +\infty$  si  $K(q) > 0$ , situación que se presenta cuando  $q > 1$ . Esto ocurre sólo si la distribución de probabilidad de orden 1 asociada al proceso tiene colas largas hacia los valores grandes. Así es, en efecto, pues la invariancia de escala sólo puede mantenerse si es posible obtener, aún con infima probabilidad, un valor de la medida arbitrariamente grande. Debemos tener presente que, conforme reducimos el tamaño de los subintervalos ( $\delta \rightarrow 0$ ), el número necesario para recubrir el soporte crece y, por tanto, al tomar el valor de la medida, tenemos la posibilidad de alcanzar valores cada vez más extremos de las variables aleatorias involucradas.

<sup>27</sup>La demostración de esta importante propiedad es una consecuencia directa de la desigualdad de Schwartz[37, 48].

Utilizando la función  $K(q)$ , podemos definir una función monotonamente<sup>28</sup> no decreciente  $C(q)$  por

$$C(q) = \frac{K(q)}{q-1} \quad (1.64)$$

denominada en ocasiones *codimensión dual* y que sirve para definir, asimismo, una *dimensión generalizada* al estilo de la dimensión de Renyi (1.25)

$$D_q = 1 - C(q) \quad (1.65)$$

### 1.5.2 Caracterización de la intermitencia

Entendiendo por **intermitencia** la posibilidad de obtener realizaciones de medidas estocásticas en las que valores muy altos de éstas se presenten conjuntamente con valores extremadamente bajos, existiendo zonas en el soporte de gran intensidad coexistiendo con otras de baja o nula intensidad, es decir, existe en cada realización una elevada inhomogeneidad y fluctuaciones que pueden ser extremadamente intensas, vamos a ver que la función  $K(q)$  nos proporciona mucha información sobre el grado de intermitencia de un proceso.

Para comprender mejor el significado de la función de escalado de momentos  $K(q)$ , supongamos un conjunto de medidas normalizado, es decir  $\langle \epsilon_\delta(x) \rangle = 1$ , que fluctúe muy débilmente. Esto significa que  $\epsilon_\delta(x) \approx 1 \forall x, \delta$ . Este conjunto *quasi-homogeneo* de medidas cumple que  $K(q) \approx 0$  y, por tanto,  $C(q) \approx 0$ . De no haber normalizado, el resultado sería equivalente a decir que

$$\langle \epsilon_\delta(x)^q \rangle \approx \langle \epsilon_\delta(x) \rangle^q \quad (1.66)$$

Sin embargo, consideremos ahora un caso extremo de intermitencia consistente en que el conjunto de medidas asociadas a una realización es el formado por una única función delta de Dirac  $\delta_D(y)$ , localizada aleatoriamente en el soporte en la posición  $y$ . Esto significa que  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \epsilon_\delta(x) = \delta_D(x - y)$ , y, por tanto

$$\epsilon_{\delta,y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & y \in [x, x + \delta) \\ 0 & y \notin [x, x + \delta) \end{cases} \quad (1.67)$$

Si suponemos que la posición  $y$  de la delta de Dirac está distribuida uniformemente en el soporte, entonces

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_\delta(x)^q \rangle &= \frac{1}{L} \int_0^L \epsilon_{\delta,y}(x)^q dy = \frac{\delta/L}{\delta^q} \\ &\propto \delta^{1-q} \end{aligned} \quad (1.68)$$

---

<sup>28</sup>Esta propiedad puede deducirse fácilmente de la convexidad de  $K(q)$ .

donde se ha considerado que el soporte de la medida es el intervalo  $[0, L]$  y que  $q > 0$ . De este resultado se deduce que

$$\begin{aligned} K(q) &= q - 1 \\ C(q) &= 1 \\ D_q &= 0 \end{aligned} \tag{1.69}$$

que caracteriza el extremo comportamiento intermitente, que consiste en que toda la actividad se concentra en un solo punto del soporte. Notemos también que los momentos  $\langle \epsilon_\delta(x)^q \rangle$  divergen en el límite  $\delta \rightarrow 0$ , cuando  $q > 1$ . Naturalmente, entre estos dos casos extremos se encuentra una infinita gama de grados intermedios de intermitencia, que  $K(q)$  ayuda a caracterizar[37, 38].

Cuando  $q \rightarrow 1$  podemos definir una medida de la inhomogeneidad  $C_1$ , también llamado *parámetro de intermitencia*, a partir de la expresión (1.64) mediante

$$C_1 = C(1) = \frac{d}{dq} K(q)|_{q=1} \tag{1.70}$$

Puede comprobarse fácilmente que  $C_1 \geq 0$  a partir del carácter monótono de  $C(q)$  y de que  $K(0) = 0$ . El parámetro de intermitencia está relacionado con el valor medio de  $\epsilon_\delta(x)$ , ya que aquellas medidas que contribuyen mayormente a la media  $\langle \epsilon_\delta(x) \rangle$  son las que tienen como soporte un subconjunto del soporte total de dimensión fractal  $D_1 = 1 - C_1$ . Valores grandes de  $C_1$  son indicativos de la presencia de grandes valores de la medida  $\epsilon_\delta(x)$ , aunque estos se van a encontrar distribuidos de manera muy dispersa<sup>29</sup> en el soporte para compensar estadísticamente la media. Notemos finalmente que, aunque  $C_1$  es una medida de la intermitencia, es  $C(q)$  quien realmente nos informa sobre su verdadera naturaleza. En efecto, de (1.64) puede interpretarse  $C(q)$  como el grado de intermitencia comparado con el caso de intermitencia extrema (1.70).

### 1.5.3 Medidas no estacionarias

Hasta este momento, se ha supuesto que las medidas estocásticas son estacionarias, con lo que hemos presentado una técnica de análisis orientada a la caracterización de su estadística mediante la imposición de la invariancia de escala. Además, tenemos algunas pautas a seguir, provenientes de los ruidos fractales en §1.4.2, que apuntan a la utilización de las funciones de

<sup>29</sup>Es decir, se encontrarán en subconjuntos del soporte con una dimensión fractal pequeña.

estructura[37, 38]. Como es lógico, la multifractalidad impondrá una forma funcional compleja a los exponentes  $\zeta(q)$ , los cuales no serán, en general, funciones lineales de  $q$ . La medida de la no estacionaridad nos la va a proporcionar la estimación de la PSD, la cual, para las situaciones en las que es previsible obtener invariancia de escala, presentará un comportamiento dado por  $P(k) \sim k^{-\beta}$  con  $\beta > 1$ .

La manera más simple de proceder en casos de no estacionaridad es la de obtener un conjunto de medidas estacionarias a partir de los datos iniciales no estacionarios  $\epsilon_{\delta_{min}}^{ne}(x)$ . Esta se realiza de manera simple tomando las diferencias entre valores vecinos a la más alta resolución disponible

$$\epsilon_{\delta_{min}}(x) = |\epsilon_{\delta_{min}}^{ne}(x + \delta_{min}) - \epsilon_{\delta_{min}}^{ne}(x)| \quad (1.71)$$

con lo que, opcionalmente, normalizando, se obtiene un nuevo conjunto de medidas cuya PSD escala como  $P(k) \sim k^{-(\beta-2)}$ . La explicación en el cambio del exponente de escalado en la PSD radica en que la operación efectuada es esencialmente asimilable a una derivación ordinaria de los datos, lo que en el espacio de Fourier equivale a una multiplicación por  $k$ . Es posible generalizar este procedimiento de una manera sistemática si en el espacio de fourier multiplicamos por  $k^{H_1}$ , donde  $0 \leq H_1 < 1$  representa el exponente característico de la no estacionaridad<sup>30</sup>, para volver después al espacio ordinario obteniendo una señal cuya PSD es  $P(k) \sim k^{-(\beta-2H_1)}$ . La estacionaridad se consigue cuando  $\beta - 2H_1 < 1$ . La operación anterior se denomina **derivación fraccional** y supone un *blanqueado*[44, 49] de los datos de partida, convirtiendo los datos no estacionarios iniciales en una señal estacionaria que conserva las propiedades de invariancia de escala quedando lista para el análisis posterior.

Otra modificación importante que introduce la no estacionaridad es que la función de autocorrelación no puede ser ya la transformada de Fourier de la PSD, pues se obtendría una correlación creciente con la separación entre medidas. En cambio, si un proceso no estacionario posee incrementos estacionarios, se puede demostrar<sup>31</sup> que es la función de estructura de segundo orden la que forma junto a la PSD el par recíproco de transformadas de Fourier

$$\langle (\epsilon_{\delta}(x + \tau) - \epsilon_{\delta}(x))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(k) e^{jk\tau} dk \quad (1.72)$$

<sup>30</sup>El exponente  $H_1$  crece desde el caso límite estacionario  $H_1 = 0$  correspondiente a un ruido  $1/f$  hasta el otro caso extremo de un comportamiento lineal sin la presencia de fluctuaciones  $H_1 = 1$ . En esencia, este parámetro es  $H_1 = H(1)$  introducido tras (1.59) y en §1.5 como  $H(q)$ . Para el mB ordinario  $H(q) = 1/2 \forall q$ .

<sup>31</sup>Se trata de una variante de la relación de Wiener-Khinchine[40].

y, por tanto, para un proceso con invariancia de escala, se cumple que  $\zeta(2) = \beta - 1$ . La función  $\zeta(q)$  es lineal para los procesos con escalado simple como ya se apuntó en (1.4.2), mientras que es no lineal y cóncava para procesos con escalado múltiple.

### 1.5.4 Modelos multifractales estocásticos

Los modelos más populares que dan origen a medidas multifractales estocásticas son los denominados **modelos de cascada multiplicativa**. Por construcción, estos modelos reproducen señales que son estacionarias e intermitentes según la ley probabilística utilizada en su definición<sup>32</sup>. Esencialmente se construye como el modelo-p determinista visto en §1.3.4, pero los pesos asociados a cada subintervalo son ahora variables aleatorias **no negativas**  $W_i$ , de valor medio unidad y tomados de la misma distribución de probabilidad. Esto define las medidas a una escala  $\delta$  como

$$\epsilon_\delta(x) = \epsilon_L \prod_{i=1}^n W_i \quad (1.73)$$

donde hemos partido de un soporte que es el intervalo  $[0, L]$  al que se le atribuye inicialmente la medida uniforme  $\epsilon_L$  y  $L/\delta = \lambda = 2^n$  es el número de intervalos disjuntos en los que queda dividido el soporte de la medida  $\epsilon_\delta$ . La ley probabilística se puede recuperar a partir del resultado final de las realizaciones, sin más que conocer el valor de los momentos  $\langle \epsilon_\delta(x)^q \rangle \sim e^{nK(q)}$ , donde  $K(q) = \ln \langle W_i^q \rangle$ , independiente del índice<sup>33</sup>. Como el conocimiento de los momentos de orden entero no es en general suficiente para ello, suele utilizarse la *transformada de Mellin* para resolver el problema de la inversión<sup>34</sup>. De este modo, considerando la variable aleatoria no negativa

<sup>32</sup>Modelos multiplicativos que reproducen a la vez intermitencia y no estacionaridad pueden verse en la referencia [42].

<sup>33</sup>Téngase en cuenta que, por construcción, las variables aleatorias  $W_i$  son independientes e idénticamente distribuidas (iid), por lo que  $\langle (\prod_{i=1}^n W_i)^q \rangle = \prod_{i=1}^n \langle W_i^q \rangle = \langle W_i^q \rangle^n$ .

<sup>34</sup>Dadas  $f(s)$  y  $g(u)$ , formarán un par bajo la transformación de Mellin cuando se cumpla

$$f(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} g(u) du \iff g(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u^{-s} f(s) ds \quad (1.74)$$

donde  $\sigma \in [\alpha, \beta]$  y  $-\infty \leq \alpha < \text{Re}(s) < \beta \leq +\infty$ .

$W$  con densidad de probabilidad  $\rho(W)$ , se puede escribir

$$e^{K(q-1)} = \int_0^{+\infty} W^{q-1} \rho(W) dW \quad (1.75)$$

$$\rho(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W^{-s} e^{K(s-1)} ds \quad (1.76)$$

que establece una relación entre la densidad de probabilidad de las variables  $W$  y la función  $K(q)$ . Con respecto a la construcción de las cascadas, hay que tener en cuenta adicionalmente algún vínculo entre los pesos  $W_i$  en cada generación<sup>35</sup>. Si este vínculo se establece de modo similar al modelo binomial en §1.3.4, se obtendrá que en cada etapa de la cascada se conservará el valor medio tomado sobre cada realización<sup>36</sup>

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda} \prod_i W_i = 1 \quad (1.77)$$

donde la suma se realiza sobre cada subintervalo del soporte, en número  $\lambda$ , en el supuesto de que la medida, inicialmente repartida de modo uniforme, sea 1. A este tipo de vínculo se le denomina *microcanónico* y las cascadas construidas de este modo se denominan *conservativas*. Sin embargo, este tipo de restricción en los pesos  $W_i$  es excesivo y conduciría a valores poco fluctuantes o, en otras palabras, a medidas poco intermitentes. Si relajamos un poco esta condición imponiendo que, en media sobre el conjunto de realizaciones,

$$\frac{1}{\lambda} < \sum_{\lambda} \prod_i W_i > = 1 \quad (1.78)$$

entonces construiremos las llamadas cascadas *canónicas*, en las que podemos obtener situaciones más intermitentes.

Si hacemos un poco de historia, deberíamos comenzar con el llamado **modelo  $\beta$** , en el que los pesos aleatorios  $W_i$  se eligen del modo siguiente: en cada generación cada subintervalo se divide en dos intervalos iguales, en cada uno de los cuales se pesa la medida que tiene el intervalo de partida mediante un factor  $W$  aleatorio binomial que toma los valores  $W_1 = 2^C$  (estado vivo) y  $W_2 = 0$  (estado muerto), con probabilidades[50, 44, 45, 48]

$$\begin{aligned} Pr(W_1) &= 2^{-C} \\ Pr(W_2) &= 1 - 2^{-C} \end{aligned} \quad (1.79)$$

<sup>35</sup>Recuérdese, por ejemplo, que en el modelo binomial §1.3.4 se verifica que  $\sum_{m=0}^n C_n^m \mu_0^{n-m} \mu_1^m = 1$  al ser  $\mu_0 + \mu_1 = 1$  y que la sumatoria anterior no es más que el valor medio de la medida en la etapa  $n$  de la cascada.

<sup>36</sup>No hay que perder de vista que  $W_i$  es la variable aleatoria y que el promedio sobre  $N$  valores de ésta se estima mediante  $1/N \sum_{i=1}^N W_i$ .



con  $C > 0$ , cumpliendo el vínculo microcanónico (1.77). Puede comprobarse fácilmente que, a cada paso del desarrollo, la medida de cada subintervalo decrece un factor  $\beta = 2^{-C}$  y que todos los subintervalos en los que la medida es no nula tienen una medida idéntica. Cuando el número de pasos tiende a infinito, este modelo conduce a *medidas monofractales* caracterizadas por la dimensión fractal<sup>37</sup>  $D_f = 1 - C$ , denominándose comúnmente a  $C$  **codimensión fractal**.

Tras el modelo  $\beta$ , que genera medidas con escalado simple, se encuentra el **modelo  $\alpha$**  en el que se pueden obtener valores diferentes de las medidas. De nuevo se trata de un modelo binomial, pero los dos estados tienen valores  $W_1 = 2^{\gamma^+}$  (estado fuerte) y  $W_2 = 2^{\gamma^-}$  (estado débil), con probabilidades dadas por (1.79) y donde los parámetros  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  y  $C$  son positivos<sup>38</sup>, estando relacionados, igual que en el modelo anterior, por el vínculo de conservación

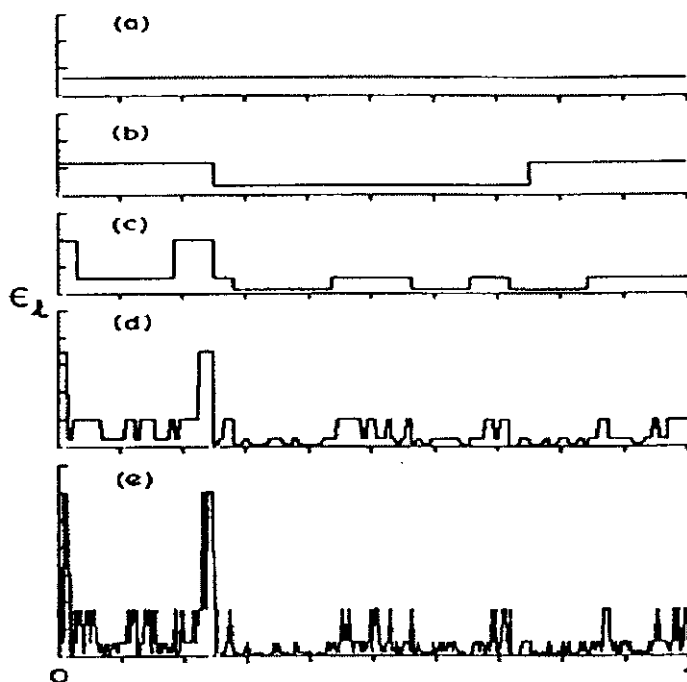


Figura 1.23: *Varias etapas en la construcción de una cascada multiplicativa según el modelo  $\alpha$ .*

<sup>37</sup>En un sentido estadístico y tras  $n$  pasos, el número medio de subintervalos vivos es  $\langle N(\lambda) \rangle = \lambda \lambda^{-C} = \lambda^{1-C}$  con  $\lambda = 2^n$ .

<sup>38</sup>A los parámetros  $\gamma^+$  y  $\gamma^-$  se les llama órdenes de singularidad extremal.

microcanónico. Esto trae como consecuencia que sólo dos de ellos sean independientes<sup>39</sup>. Pueden probarse de un modo simple las siguientes propiedades

1. En cada etapa de la cascada aparecen nuevos valores de las medidas (singularidades), resultado de la multiplicación de  $W_1$  y  $W_2$  con lo que el reparto de la medida inicial es claramente *singular*, entendiendo por tal la posible aparición de intermitencia.
2. En la etapa  $n$ -ésima de la cascada podremos tener valores de las medidas que resultan del producto de  $W_1$  y  $W_2$  de la forma  $\mu = W_1^k W_2^{n-k}$ , con  $k = 1, \dots, n$ . Si en esta etapa el número de subintervalos es  $\lambda = 2^n$  y  $\gamma_k = \frac{1}{n}(k\gamma^+ - (n-k)\gamma^-)$ , entonces los posibles valores de las medidas que podemos tener en cada subintervalo se pueden escribir como  $W_1^k W_2^{n-k} = \lambda^{\gamma_k}$ , siendo la probabilidad de obtenerlas

$$Pr(\mu = \lambda^{\gamma_k}) = C_n^k \lambda^{-Ck} (1 - \lambda^{-C})^{n-k} \quad (1.80)$$

De modo que, llamando  $\epsilon_\lambda$  al valor de la medida a resolución  $\delta = L/\lambda$ , se tiene que

$$Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \sim \lambda^{-c(\gamma)} \quad (1.81)$$

donde  $c(\gamma) \geq 0$  se denomina **función de codimensión** y juega un papel equivalente al espectro de singularidades  $f(\alpha)$  en los multifractales deterministas y a  $\gamma$  se la llama **orden de la singularidad**<sup>40</sup>, siendo equivalente a  $\alpha$  en §1.3.1.

3. Existe una estrecha relación entre la función de codimensión  $c(\gamma)$  y la función de escalado de momentos  $K(q)$  introducida en (1.63). En efecto, puede probarse que<sup>41</sup>

$$\langle \epsilon_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{\max_\gamma [q\gamma - c(\gamma)]} \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (1.82)$$

con lo que  $K(q) = \max_\gamma [q\gamma - c(\gamma)]$ , que relaciona a  $K(q)$  y  $c(\gamma)$  por medio de una transformación de Legendre, obteniéndose también que  $c(\gamma) = \max_q [q\gamma - K(q)]$ .

<sup>39</sup>El modelo  $\alpha$  se reduce al  $\beta$  si tomamos  $\gamma^+ = C$  y  $\gamma^- = +\infty$ .

<sup>40</sup>Suele utilizarse la notación  $\epsilon_\lambda \equiv \lambda^\gamma$  para referirse a un valor posible de las medidas a una cierta resolución  $\lambda$ , lo que, en realidad, no es más que un cambio de variable que, además, pone de manifiesto las propiedades de invariancia de escala de  $\epsilon_\lambda$ .

<sup>41</sup>No debemos olvidar que, por construcción, el proceso estocástico es estacionario y, por tanto, la estadística de primer orden es independiente de la variable  $x$  que representa al subintervalo donde se toma el valor de la medida.

4. Debido al vínculo de conservación microcanónico y puesto que estamos es una situación estacionaria<sup>42</sup>, se tiene que  $K(0) = K(1) = 0$  y por tanto  $\gamma_1 - c(\gamma_1) = 0$ , es decir
- El orden de singularidad  $\gamma_1 \equiv C_1$  es el correspondiente al de la *medida media*.
  - La codimensión posee un punto fijo en  $C_1$ , denominándose a este parámetro **codimensión media**, representando la codimensión asociada a la propia media. Además, coincide con el parámetro de intermitencia introducido en (1.70).
  - $c(\gamma)$  es convexa.
  - $C_1 < 1$  para procesos unidimensionales.
5. Es fácil demostrar que, con el modelo propuesto, la función de autocorrelación tiene una ley de escala[45]

$$\langle \epsilon_\lambda(x) \epsilon_\lambda(x + \tau) \rangle \sim \tau^{-K(2)} \quad (1.83)$$

por lo que, el exponente de escalado de la PSD vale  $\beta = 1 - K(2)$ .

Como consecuencia del carácter multiplicativo del modelo a cascada y del vínculo microcanónico, o canónico en una situación más relajada, la presencia de valores muy elevados para las medidas debe ir asociada a la aparición de valores muy pequeños para el resto de medidas en la realización del proceso. Situaciones extremas se presentan cuando imaginamos las cascadas desarrolladas *ad infinitum* o llamadas también *completamente desarrolladas*. En estas cascadas el número de etapas es infinito, como lo sería, asimismo, el producto (1.73)

$$\epsilon_\infty(x) = \prod_{i=1}^{\infty} W_i \quad (1.84)$$

Esto nos da una idea del carácter singular del límite  $\lambda \rightarrow \infty$  (o bien  $\delta \rightarrow 0$ ). La imagen que tendrían las realizaciones es algo parecido a funciones delta de Dirac  $\delta_D$  distribuidas en el soporte, ya que, a efectos prácticos, solo contarían los valores extremos de la medida, mientras que, debido al vínculo de conservación, el resto de valores es despreciable. Si, en estas circunstancias, construimos las medidas a resolución finita  $\lambda < +\infty$ , integrando la

<sup>42</sup>Para procesos estacionarios normalizados  $\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle = 1$ , como por construcción puede también suponerse ergódico, entonces el promedio sobre cada realización también vale la unidad.

cascada completamente desarrollada sobre subintervalos de longitud  $\delta = L/\lambda$  (llamadas *medidas vestidas*), el resultado, en general, no equivale a la cascada desarrollada únicamente hasta esta resolución (obteniendo las llamadas *medidas desnudas*). En general, se comprueba que, debido al carácter singular del límite  $\lambda \rightarrow \infty$ , las medidas vestidas poseen fluctuaciones mucho más intensas que las correspondientes desnudas a la misma resolución, o dicho de otro modo, la integración que lleva consigo el promedio para el cálculo de las medidas vestidas no puede suavizar las intensísimas fluctuaciones presentes en el límite<sup>43</sup>. Por esta razón, en datos adquiridos en el mundo real, los cuales son cantidades vestidas, suele existir un valor de  $q$  denominado  $q_D$  de modo que  $\epsilon_\lambda^{q_D}$  es un conjunto de datos tan intermitente que  $\langle \epsilon_\lambda^{q_D} \rangle \rightarrow \infty$ , aún a resolución no infinita  $\lambda$ , donde tenemos en cuenta todas las realizaciones posibles del proceso en la evaluación del promedio. Si no están disponibles todas las realizaciones, entonces esto significa que sólo se tiene acceso a un valor máximo del orden de singularidad  $\gamma_{d,s}$  (correspondiente al valor máximo accesible de la medida  $\epsilon_\lambda$ , que ahora es vestida)<sup>44</sup> y, por tanto, a partir de  $q_D$ , la función  $K(q)$  es lineal siguiendo la ley

$$K(q) = \gamma_{d,s}(q - q_D) + K(q_D) \quad (1.86)$$

Cuando disponemos de todas las posibles realizaciones,  $\gamma_{d,s} \rightarrow \infty$ , por lo que la repercusión de esto sobre la estimación de  $K(q)$  en la práctica es que, disponiendo de todas las realizaciones del proceso y denominando  $K_{real}(q)$  a la función de escalado de momentos cuando se calculan estos sobre cantidades vestidas y  $K(q)$  a la correspondiente a cantidades desnudas a la misma resolución, se tiene que

$$K_{real}(q) = \begin{cases} K(q) & q < q_D \\ \infty & q > q_D \end{cases} \quad (1.87)$$

Este comportamiento se conoce como *divergencia de los momentos estadísticos*<sup>45</sup>

<sup>43</sup>Sólo en el caso del vínculo microcanónico, por construcción  $\gamma < 1$ , todas las singularidades se suavizan[44].

<sup>44</sup>En realidad, debido al carácter singular del límite  $\lambda \rightarrow \infty$ , se definen integrales del tipo

$$F_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_\lambda(A) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_A \epsilon_\lambda dx \quad (1.85)$$

donde  $F_\lambda(A)$  es el llamado *flujo* sobre el subconjunto  $A$  del soporte a resolución  $\lambda$ . Sólo existe el límite para estas cantidades, las cuales pueden considerarse asimismo medidas.

<sup>45</sup>Desde un punto de vista informal, la divergencia de los momentos significa que los detalles a escalas más pequeñas que aquella en la que trabajamos dominan en la estadística de orden  $q > q_D$ , debido a que las medidas vestidas llevan información sobre lo que ocurre a dichas escalas.

y representa un verdadero problema en la estimación práctica de  $K(q)$  para datos reales. La estimación de  $q_D$  se puede realizar mediante la fórmula  $K(q_D) = q_D - 1$  o bien teniendo en cuenta que la divergencia de los momentos es equivalente a la presencia de una cola de tipo hiperbólico en la distribución de probabilidad, es decir  $Pr(\epsilon_\lambda > r) \sim r^{-q_D}$ .

Otro problema añadido en la determinación práctica de  $K(q)$  es el efecto debido al tamaño finito que suele tener el conjunto de realizaciones disponibles. Disponiendo de todas las realizaciones se tiene acceso a todo el espacio de probabilidad, es decir a todos los órdenes de singularidad  $\gamma$  desde  $-\infty$  a  $+\infty$ . Suele introducirse una *dimensión del muestreo*  $D_m$  definida por  $N_s = \lambda^{D_m}$  donde  $N_s$  es el número de realizaciones disponible. Es fácil probar que con  $N_s$  realizaciones se tiene acceso a órdenes de singularidad  $\gamma_s$ , de modo que  $c(\gamma_s) \equiv 1 + D_m$ . Todo esto nos lleva a admitir que sólo pueden ser determinados con precisión los momentos hasta un orden máximo  $q_s$  con una muestra finita de realizaciones

$$K_s(q) = \begin{cases} K(q) & q < q_s \\ \gamma_s(q - q_s) + K(q_s) & q \geq q_s \end{cases} \quad (1.88)$$

La acción combinada de la divergencia de los momentos y la limitación del número de realizaciones produce un efecto lineal en la estimación con datos reales de  $K(q)$  dado por (1.86) y (1.88).

### 1.5.5 Multifractales universales

Dedicamos una subsección aparte a este modelo debido a su importancia, no solo teórica, sino eminentemente práctica, ya que, como veremos, permite una parametrización de las funciones más importantes que caracterizan la invariancia de escala de las medidas multifractales estudiadas más arriba, a saber  $K(q)$  y  $c(\gamma)$ . Ante todo, es importante darse cuenta de que un modelo multiplicativo se puede considerar *log-aditivo* sin más que escribir (1.73) en la forma

$$\epsilon_\lambda(x) = e^{\ln(\prod_{i=1}^n W_i)} = e^{\sum_{i=1}^n \ln(W_i)} \quad (1.89)$$

donde hemos hecho explícita la dependencia con la escala, poniendo el número de subintervalos  $\lambda = 2^n$  en que queda dividido el soporte de la medida. Como ya sabemos, la suma en (1.89) contiene los factores multiplicativos correspondientes a las etapas del desarrollo de la cascada y corresponden al valor de variables aleatorias que, en principio, son independientes e idénticamente distribuidas. El Teorema Central del Límite nos dice que, si  $n$  es suficientemente grande, esta suma corresponde a una variable aleatoria distribuida

normalmente. Suele decirse que la distribución Normal es *estrictamente estable* (Apendice A) y que, en general, la suma de variables independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita pertenece al *dominio de atracción* de la distribución Normal. Sin embargo, las distribuciones normales no son las únicas estables, al menos en un sentido amplio. La suma de *variables extremales asimétricas estables de Levy* (VEAEL) satisface una versión generalizada del Teorema Central del Límite y tiene las siguientes propiedades:

- La suma  $S_n = \sum_{i=1}^n W_i = n^{1/\alpha}W + b_n$ , donde  $W$  es también VEAEL,  $0 < \alpha \leq 2$  y  $b_n$  es una constante que depende del número de variables de la suma  $n$ .
- No es necesario que tengan ni media ni varianza finitas, verificandose que  $\langle W^q \rangle$  diverge para  $q > \alpha$ . Para  $\alpha = 2$  se recupera la variable gaussiana.
- La densidad de  $W$  para valores grandes de ésta, es decir la cola positiva, sigue una ley hiperbólica  $\rho(W) \sim W^{-\alpha}$ .

Las propiedades de invariancia de escala impuestas en este esquema dan lugar a que  $K(q)$  y  $c(\gamma)$  tengan las siguientes expresiones paramétricas y propiedades (Apendice A)

- La función de escalado de momentos es

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha-1}(q^\alpha - q) & \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.90)$$

siendo  $0 \leq \alpha \leq 2$  y  $q > 0$

- Usando la transformada de Legendre se obtiene la forma parametrizada de la función de codimensión

$$c(\gamma) = \begin{cases} C_1 (\frac{\gamma}{C_1^{\alpha'}} + \frac{1}{\alpha})^{\alpha'} & \alpha \neq 1 \\ C_1 e^{\frac{\gamma}{C_1^{\alpha'}} - 1} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.91)$$

donde  $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$ .

- El parámetro  $\alpha$  se llama **índice de Levy** y  $C_1$  es la ya conocida codimensión media.
- El orden crítico  $q_D$  para la divergencia de los momentos se determina por la relación

$$K(q_D) = q_D - 1 \quad (1.92)$$

- El orden máximo  $q_s$  se estima por

$$q_s = \left( \frac{1 + D_m}{C_1} \right)^{1/\alpha} \quad (1.93)$$

con lo que obtenemos **medidas multifractales universales** al estar caracterizado su comportamiento complejo por unos pocos parámetros:  $\alpha$  y  $C_1$  (Además de  $H \equiv H_1$  en los casos no estacionarios). La simulación de estos procesos puede verse en el apéndice B de esta memoria.

### 1.5.6 Técnicas de análisis: la técnica DTM

La universalidad representa claras ventajas al reducir toda la compleja estadística de estos procesos a la estimación de sólo tres parámetros, dos en el caso estacionario. Los problemas derivados de la divergencia de los momentos y del tamaño finito de la muestra de realizaciones disponibles hacen que el ajuste directo de  $K(q)$  o de  $c(\gamma)$  a las expresiones (1.90) o (1.91) se considere a veces sólo un preámbulo<sup>46</sup> en la estimación precisa de  $\alpha$  y  $C_1$ , debiéndose emplear otros métodos para ello. En los casos no estacionarios tenemos el parámetro adicional  $H$ , el cual se obtiene por medio de las funciones de estructura según §1.5.3. La obtención del conjunto de medidas estacionarias se realiza mediante una operación de derivación fraccional de orden  $H$ , es decir, filtrando las medidas no estacionarias en el espacio de Fourier con el factor  $k^H$ . Los datos filtrados son ya estacionarios, conservando sus propiedades de invariancia de escala intrínsecas. Esto equivale a afirmar que estas medidas resultan de una combinación de un proceso multiplicativo como el descrito en el modelo anterior, unido a un proceso aditivo que sería el responsable de la no estacionaridad final del proceso.

Para conseguir una correcta determinación de los parámetros de universalidad, aplicaremos la técnica denominada DTM<sup>47</sup> desarrollada por Lavalée[49]. Consiste en elevar el campo de medidas disponible a la más alta resolución  $\epsilon_\Lambda$  a la potencia  $\eta > 0$ , obteniéndose un nuevo conjunto de medidas  $E_\Lambda = (\epsilon_\Lambda)^\eta$ . Este nuevo conjunto de medidas se degrada a la manera vista en (1.62) desde la resolución más alta  $\Lambda = L/\delta_{min}$  hasta las intermedias  $\lambda$ , construyendo así  $E_\lambda$ , el cual conserva además sus propiedades de invariancia de escala, es decir,  $\langle E_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K_E(q)}$ . Es fácil probar que  $K_E(q) = K(q, \eta) = K(q\eta) - qK(\eta)$  de donde, teniendo presente que en el

<sup>46</sup>Sólo cuando  $C_1$  es muy pequeña, tanto  $q_s$  como  $q_D$  son lo bastante grandes como para que pueda realizarse un ajuste directo de  $K(q)$  hasta órdenes de  $q$  suficientemente amplios.

<sup>47</sup>Las siglas provienen de *Double Trace Moments*.

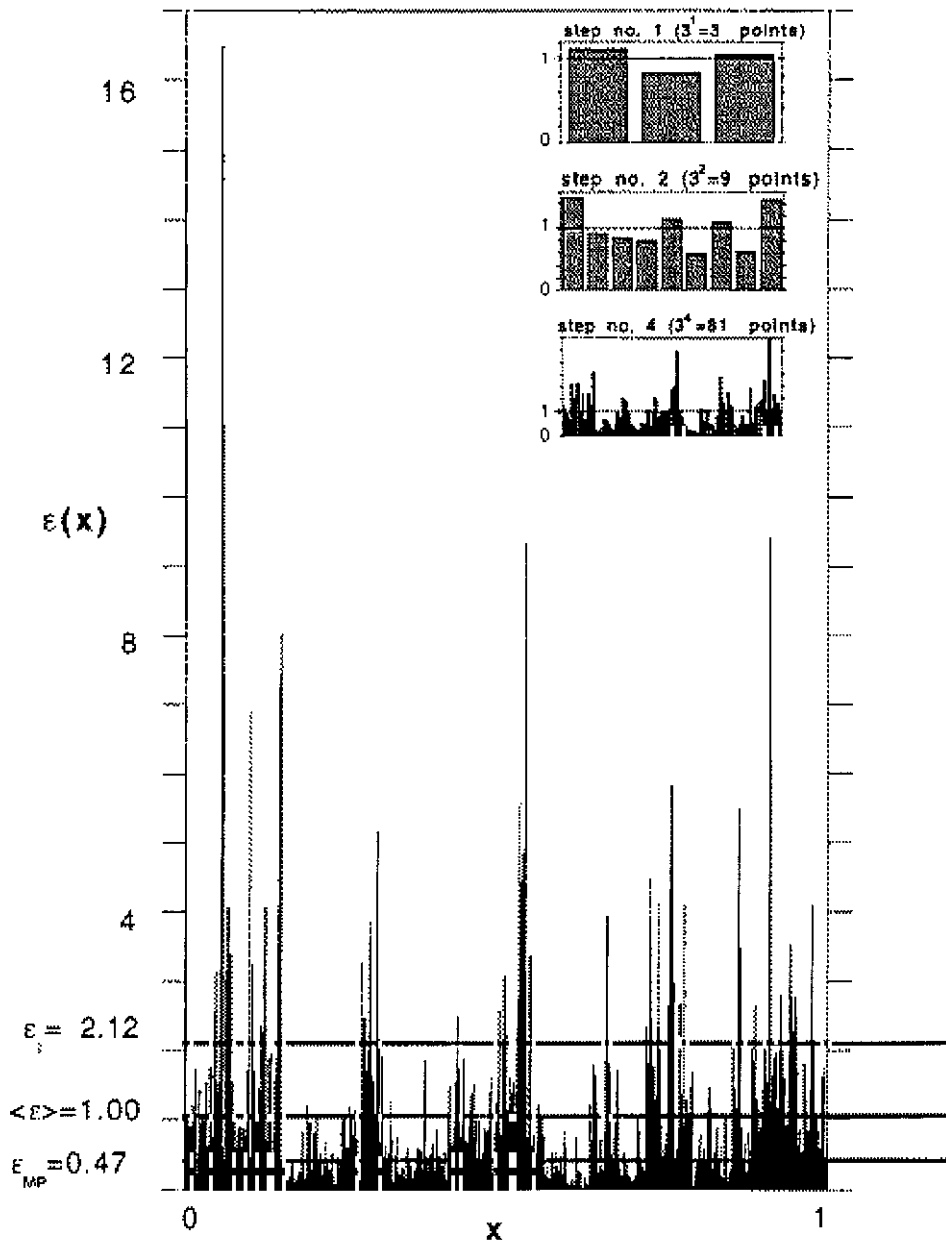


Figura 1.24: Desarrollo de una cascada multiplicativa según una distribución log-normal ( $\alpha = 2.0$ ), con  $C_1 = 0.115$ , siendo 3 la relación entre escalas sucesivas. Se muestra, asimismo, el valor más probable  $\epsilon_{MP}$  de las medidas y el valor  $\epsilon_1$  correspondiente a la singularidad media.



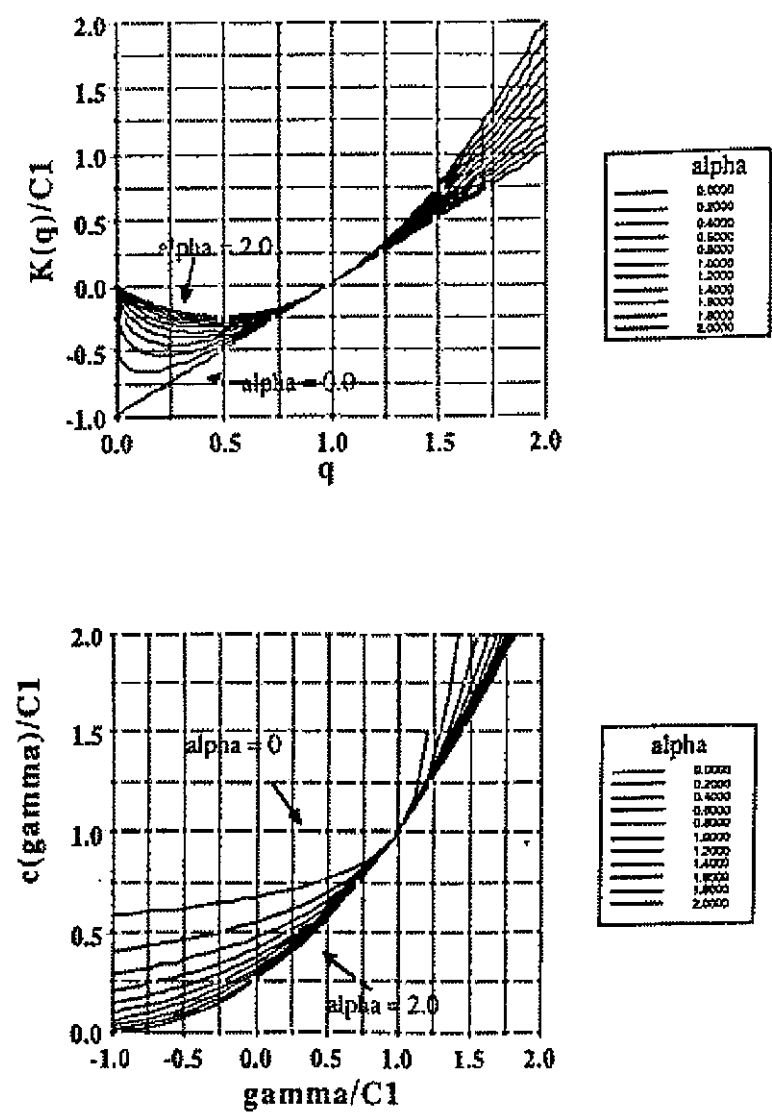


Figura 1.25: Representacion de la función de escalado de momentos,  $K(q)$ , y la función de codimensión,  $C(\gamma)$ , para diversos valores del índice de Levy,  $\alpha$ .

modelo multifractal universal  $K(q)$  viene dada por (1.90), se obtiene finalmente

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (1.94)$$

Aplicando esta ecuación para valores diferentes de  $\eta$  y valores fijos de  $q$  y representando  $K(q, \eta)$  en una gráfica log-log, se obtendrá una línea recta para cada  $q$  con pendiente  $\alpha$ , siendo  $C_1$  la intersección con  $\eta = 1$

$$C_1 = K(q) \frac{\alpha - 1}{q^\alpha - q} \quad (1.95)$$

Debido a las limitaciones impuestas por  $q_D$  y  $q_s$ , aunque la técnica DTM es independiente de  $q$ , el rango de validez de la técnica viene determinado por la condición

$$\max(q\eta, \eta) < \min(q_s, q_D) \quad (1.96)$$

En la práctica se encuentra que, para  $\eta \rightarrow 0$ ,  $K(q, \eta)$  es aproximadamente independiente de  $\eta$ , mientras que, para valores grandes de  $\eta$ , debido a la divergencia de los momentos, encontramos también un comportamiento de  $K(q, \eta)$  constante. Se habla del comportamiento en "S" de  $\log K(q, \eta)$  frente a  $\log \eta$ , siendo la región central la que es apta para realizar el ajuste que nos proporcionará el valor de  $\alpha$ . Algunos detalles adicionales sobre la aplicación concreta de la técnica se encuentran en §4.2.

## Capítulo 2

# Radiación cósmica

El espectro de energías de los Rayos Cósmicos (RC) se extiende desde 1 GeV ( $10^9$  eV) hasta 100 EeV ( $10^{20}$  eV)<sup>1</sup>, de acuerdo con una distribución en forma de ley de potencias ( $E^{-\gamma} dE$ ). La inmensa mayoría de los RC son hadrones (protones y núcleos). Sólo una pequeña fracción consiste en electrones ( $\sim 0.1\%$ ) y una aun menor en fotones ( $\sim 0.01\%$ ).

A más de 100 TeV de energía, el flujo de RC es tan bajo que la medida directa es imposible, por lo que nos vemos limitados a la detección indirecta de la cascada atmosférica extensa (EAS)<sup>2</sup> producida por el RC al entrar en la atmósfera. Los observables habituales son la distribución lateral de las partículas cargadas en función de la distancia al eje de la cascada, la de la luz Cerenkov producida por las partículas cargadas de la cascada y la distribución lateral de muones. El desarrollo longitudinal de la cascada puede extraerse de la distribución Cerenkov de manera indirecta. La distribución de tiempos de las partículas a nivel de observación, así como el impulso de luz Cerenkov, aportan información suplementaria sobre el desarrollo longitudinal.

El análisis de los datos experimentales de cascadas atmosféricas exige una cuidadosa modelización teórica de los procesos que sufren las partículas de alta energía cuando entran en la atmósfera. Esto sólo es posible mediante simulaciones de Monte Carlo (MC) que tengan en cuenta todo nuestro conocimiento sobre interacciones electromagnéticas y fuertes. Por otra parte, la respuesta de los detectores a nivel de tierra también puede modelizarse usando una simulación de MC. Esta simulación permite explorar los límites prácticos de la determinación de los observables de la cascada y de la partícula primaria.

Este capítulo intenta describir las características de RC primarios entre

---

<sup>1</sup>La elevada energía de los rayos cósmicos primarios obliga a la introducción de múltiplos del eV como el GeV ( $10^9$  eV), el TeV ( $10^{12}$  eV), el PeV ( $10^{15}$  eV) o el EeV ( $10^{18}$  eV).

<sup>2</sup>Siglas provenientes de *Extensive Air Shower*.

$10^{11}$  (100 GeV) y  $10^{20}$  eV (100 EeV), así como los aspectos mas significativos de la producción de cascadas atmosféricas. Finalmente se describe la simulación MC de estas ya que constituye una herramienta esencial para este trabajo.

## 2.1 Naturaleza y características de la radiación cósmica

El flujo de RC, o número de ellos que llegan a nosotros por unidad de superficie y unidad de tiempo, cae muchos órdenes de magnitud en el rango de energías que va del GeV al TeV. Esto hace necesario un buen número de técnicas experimentales que incluyen satélites y sondas espaciales hasta los  $\sim 10$  TeV, globos hasta los  $\sim 100$  TeV y detectores en tierra a energías mayores de  $\sim 300$  GeV [51, 52]. Frente a los satélites y las naves espaciales que miden el flujo y la composición de los RC directamente, en los globos ha de tenerse en cuenta la fracción de las partículas primarias que colisionan en la masa de aire que aun tienen encima (habitualmente unos  $5 \text{ g/cm}^2$ )<sup>3</sup>.

A energías mayores de 100 TeV, el flujo se hace tan reducido que sólo es posible la detección desde la superficie terrestre. Esta técnica hace uso de la cascada de partículas secundarias, EAS, que el RC primario genera en la atmósfera, y está formada de electrones, muones, hadrones, luz Cerenkov y de fluorescencia y ondas de radio. Todos estos subproductos pueden detectarse en tierra y nos permiten, en principio, reconstruir la energía, naturaleza y dirección de procedencia del RC original.

### 2.1.1 Espectro de energía

La figura 2.1 muestra el espectro diferencial de todos los RC tal y como fue compilado por Wiebel [53]. Como el espectro cae muy rápidamente, se ha multiplicado por  $E^{2.75}$  con el fin de revelar pequeñas estructuras. Estas estructuras podrían deberse a efectos experimentales o bien ser un indicio de diferentes regímenes de producción o propagación de los RC. Las medidas que se han recogido proceden de satélites, globos, redes de detectores en tierra y un detector de luz de fluorescencia (el llamado *Ojo de Mosca*).

Podemos dividir todo el rango de energías en tres regiones:

---

<sup>3</sup>En temas relacionados con la interacción entre la RC y la atmósfera, es habitual expresar la altitud sobre el nivel del mar en términos del *espesor atmosférico* que queda por encima.

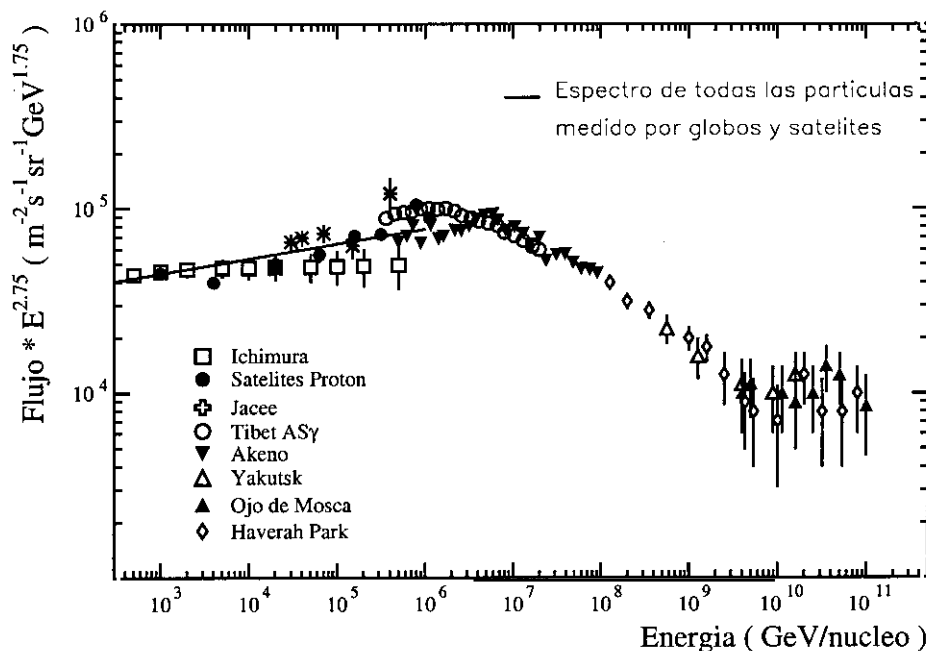


Figura 2.1: *Espectro diferencial de todos los rayos cósmicos medido por detectores en tierra (de [53]).*

i) Entre  $10^{11}$  y  $10^{15}$  eV, el flujo de RC (número de partículas por  $m^2$ , segundo e intervalo de energía) sigue una ley de potencias:

$$\frac{dN}{dE} = A E^{-\gamma} \quad (2.1)$$

con un índice espectral  $\gamma$  de  $2.67 \pm 0.02$  [53].

ii) En torno a  $10^{15}$  eV, se produce un cambio en la pendiente. Entre  $10^{16}$  and  $10^{19}$  eV el espectro se ajusta bien a una ley de potencias de índice espectral 3.0. El origen de este cambio de pendiente (generalmente conocido como la *rodilla*) es muy discutido.

iii) A energías por encima de  $10^{19}$  eV, el espectro se *endurece*, esto es, su índice espectral cae a valores entre 2.4 y 2.5 (tal rasgo del espectro se ha venido en llamar el *tobillo*). Alrededor de los  $10^{19}$  eV, los RC interaccionan con la radiación de fondo de 2.7 K [54]. Se ha predicho la existencia de un corte en el espectro, llamado de Greisen, de cuya existencia no se tiene aun evidencia concluyente: se han llegado a registrar RC a energías de  $3 \cdot 10^{20}$  eV [55].

Grupo	Z	$\Phi_0$	$\gamma$
H	1	$(10.91 \pm 0.32) \cdot 10^{-2}$	$2.75 \pm 0.02$
He	2	$(6.60 \pm 0.15) \cdot 10^{-2}$	$2.62 \pm 0.02$
medio	6-8	$(2.86 \pm 0.06) \cdot 10^{-2}$	$2.67 \pm 0.02$
pesado	10-16	$(2.36 \pm 0.07) \cdot 10^{-2}$	$2.62 \pm 0.02$
muy pesado	17-26	$(2.52 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}$	$2.60 \pm 0.03$
espectro total		$(25.35 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}$	$2.67 \pm 0.02$

Tabla 2.1: *Parámetros del ajuste,  $\Phi_0$  ( $m^2 \cdot s \cdot sr \cdot TeV/núcleo$ ) a 1 TeV y  $\gamma$ , a  $dN/dE = \Phi_0 E^{-\gamma}$  para RC en el rango 100 GeV - 100 TeV, de Wiebel [53].*

### 2.1.2 Composición química

Por debajo de los 100 GeV, los detectores a bordo de satélites nos permiten medir el flujo primario fuera de la atmósfera y resolver entre los distintos elementos (en algunos casos hasta entre diferentes isótopos). La composición atómica de los RC resulta ser muy parecida a la del sistema solar. Existen, sin embargo, diferencias muy reveladoras. El Li, Be y B son escasos en la materia ordinaria y, si se encuentran entre los RC, es tan sólo debido a la ruptura de núcleos pesados en el espacio recorrido desde las fuentes. Nos permiten, por tanto, deducir la densidad de gas que han atravesado, que resulta ser del orden de 4-5 g/cm<sup>2</sup>, así como el tiempo que ha transcurrido desde que fueron creados. Si suponemos que la densidad de gas interestelar está cerca de 1 átomo/cm<sup>3</sup>, el tiempo que se estima está próximo a  $3 \cdot 10^6$  años.

En el rango de 100 GeV a 100 TeV, nos apoyamos en medidas llevadas a cabo en satélites y globos. La precisión es menor y sólo podemos obtener espectros de grupos de elementos, como los recogidos en la tabla 2.1.

Es digno de mención que las medidas a bordo de los satélites Proton [56] en los años setenta y, más recientemente, en los globos de JACEE [57] sugieren una caída más fuerte del espectro protónico por encima de  $\sim 10$  TeV. Está energía está aproximadamente dos órdenes de magnitud (correspondiendo con la masa atómica del hierro) por debajo de la *rodilla*, de forma que ambos cambios de pendiente podrían estar relacionados. No obstante, otros experimentos con globos no confirman esta estructura [58] y el hecho de que el espectro de muones no exhiba ninguna desviación arroja ciertas dudas sobre su existencia. En la actualidad JACEE aporta los resultados de composición química a las más altas energías por debajo de la *rodilla*.

Sólo técnicas indirectas que aprovechan las propiedades de los EAS son aplicables a la medida de la composición más allá de la *rodilla* [59, 52, 51].

Los métodos que se han venido empleando son esencialmente cuatro:

a) **Fluctuaciones:** Los nucleones constituyentes de los núcleos pesados se separan en la primera interacción, dando lugar a cascadas prácticamente coaxiales. En consecuencia, las propiedades de la cascada en el suelo fluctúan menos en los primarios pesados, aunque la exacta magnitud de esta diferencia sea un tema controvertido. Si aplicamos el sencillo *modelo de superposición* (MS, en el que se supone que una cascada iniciada por un núcleo de masa  $A$  y energía  $E$  se comporta como la suma de  $A$  cascadas de energía  $E/A$ ), obtenemos que las fluctuaciones en un núcleo de masa  $A$  son un factor  $\sqrt{A}$  menores que las de un protón. Sin embargo, mientras las simulaciones [60] realizadas con el programa CORSIKA [61], y basadas en el modelo VENUS [62] de interacciones hadrónicas, indican que las fluctuaciones reales son sólo 30% mayores de los esperado con el MS, los cálculos [63] basados en el *modelo de cuerdas gluón-quark* sostienen que la diferencia es de casi un 200%. Debemos, además, tener en cuenta que, en la práctica, a las fluctuaciones intrínsecas se unen las de muestreo, puesto que nunca es posible registrar todas las partículas de la cascada en el suelo. Hasta el momento, los experimentos basados en fluctuaciones indican una composición mixta a energías por encima de la *rodilla* [64, 65, 66].

b) **Proporción de muones a electrones:** Las subcascadas de cascadas iniciadas por núcleos pesados alcanzan el máximo de su desarrollo antes que aquellas iniciadas por núcleos ligeros. El resultado es que la componente electromagnética de la cascada se desvanece más rápidamente y pocos electrones alcanzan el suelo. Por el contrario, los muones no son tan afectados por la posición del máximo y eso convierte la relación  $N_\mu/N_e$  en un buen estimador de la masa del primario. La medida de este observable se ve dificultada por el hecho de que los muones tienen una distribución lateral muy ancha y poco densa, que obliga a diseñar campos de detectores muy extensos. Sólo en los últimos años se han construido detectores que hacen posible la medida de la distribución lateral [67, 68, 69].

c) **Posición del máximo de la cascada:** La posición de  $X_{max}$  se puede determinar directamente con la ayuda de la luz Cerenkov o de la de centelleo producidas por las partículas electromagnéticas de la cascada. Como hemos comentado, los núcleos pesados alcanzan el máximo por encima de los ligeros y la medida de  $\langle X_{max} \rangle$  nos permite una estimación cruda de la composición química. La figura 2.2 [70] incluye todas las medidas realizadas usando la luz Cerenkov. También mostramos en esta figura [71] los resultados del *Ojo de Mosca*, un experimento que detecta la luz de fluorescencia de las moléculas de nitrógeno excitadas por la cascada. Este método es muy sensible pero sólo puede aplicarse a energías de más de  $10^{17}$  porque la luz de fluorescencia es muy débil. Ambas series de resultados se pueden interpretar como una tran-

sición de composición pesada a  $10^{17}$  eV a composición puramente protónica a  $10^{19}$  eV.

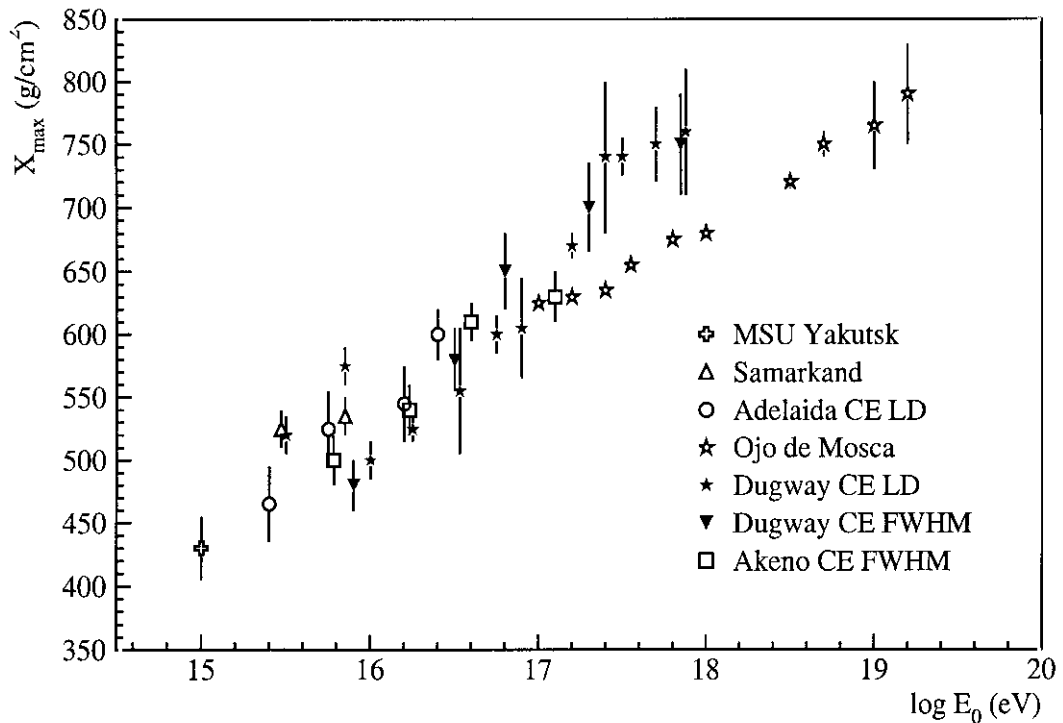


Figura 2.2: Profundidad del máximo de la cascada frente a energía primaria de acuerdo con [70] y [71], donde se detallan los símbolos correspondientes a los artículos.

d) **Muones subterráneos:** Se han construido detectores de muones bajo tierra (a profundidades de miles de metros, correspondiendo a espesores de  $\sim 100$  kg/m<sup>2</sup>) con el fin de registrar tan sólo los muones de más de unos cientos de TeV. Estos muones proceden de la desintegración de mesones generados en las primeras etapas del desarrollo de la cascada y, en consecuencia, su energía está estrechamente relacionada con la masa y la energía por nucleón de la partícula incidente. Los primeros detectores subterráneos datan de los años sesenta [72] y, a pesar de que últimamente se han instalado detectores aun mayores [73], los resultados siguen siendo ambiguos. Algunos de ellos apuntan hacia un enriquecimiento en protones a  $10^{15}$  eV, mientras otros encajan perfectamente con una composición sin cambios en la región de la rodilla.



## 2.2 Cascadas atmosféricas electromagnéticas

Un electrón (positrón) o un rayo  $\gamma$  genera una cascada puramente electromagnética por medio del bremsstrahlung y la producción de pares  $e^+e^-$  a partir de un fotón. Consideremos un modelo enormemente simple de la cascada electromagnética propuesto en [74] y [75]. Un fotón de energía  $E_0$  recorre una distancia  $D$  antes de crear un par electrón-positrón. Cada una de estas partículas lleva consigo en media la mitad de la energía inicial, viaja otra distancia  $D$ , sufre bremsstrahlung y produce un fotón de energía promedio  $E_0/4$ . El bremsstrahlung y la producción de pares siguen produciéndose hasta que se alcanza la energía crítica  $E_c$  en la cual estos procesos son dominados por, respectivamente, ionización y scattering Compton ( $E_c=102$  MeV en la atmósfera). La cascada alcanza su máximo desarrollo  $X_{max}$  cuando la energía promedio es  $E_c$ . El número total de fotones y electrones  $N_{max}$  viene dado por  $E_0$  dividido por  $E_c$  ( $N_{max} \sim 10 E_0(\text{GeV})$ ). Calculemos el número de distancias  $D$  necesario para alcanzar el máximo. A las energías de interés, la longitud de radiación por bremsstrahlung  $\epsilon$  es prácticamente igual a la de producción de pares (ambas en torno a  $37 \text{ g/cm}^2$ ). Sea  $D$  la distancia a la cual la probabilidad de ambos procesos es  $1/2$ . Entonces  $D$  es  $\epsilon \ln 2$  y el máximo se alcanza cuando se ha producido un número  $\ln(E_0/E_c)/\ln 2$  de distancias  $D$ , esto es,  $X_{max}$  sigue una dependencia logarítmica con la energía primaria  $X_{max} = \ln(E_0/E_c)$  longitudes de radiación.

Simulaciones de MC detalladas [76] demuestran que el desarrollo longitudinal promedio se puede aproximar como:

$$N_e = \frac{0.31}{\sqrt{x}} e^{t(1-1.5 \ln s)} \quad (2.2)$$

siendo  $N_e$  el número de electrones en la cascada (*tamaño de la cascada*);  $t$  la profundidad atmosférica en longitudes de radiación;

$$x = \ln \frac{E_0}{E_c} \quad (2.3)$$

y  $s$  es la llamada *edad de la cascada*:

$$s = \frac{3}{1 + \frac{2x}{t}} \quad (2.4)$$

El parámetro de la edad crece de cero en el punto de primera interacción a 1 en el máximo y 2 allí donde el número de partículas en la cascada es menor de una (ver figura 2.3).

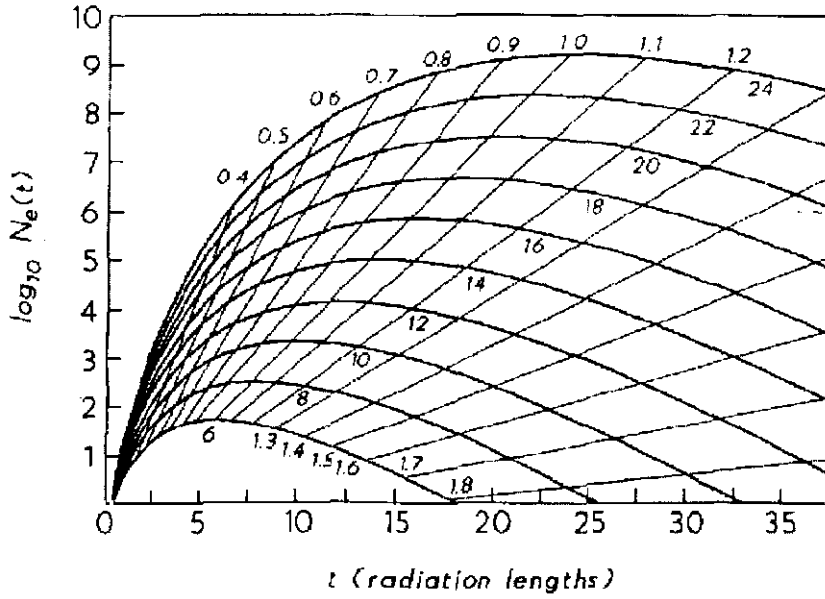


Figura 2.3: Desarrollo longitudinal de una cascada puramente electromagnética. Las líneas diagonales etiquetadas de 0.4 a 1.2 indican posiciones de edad constante. Los números del 6 al 24 junto a cada curva corresponden al  $\ln E_0/E_c$ .

La teoría de cascada electromagnéticas nos proporciona una expresión para la distribución lateral promedio [54]:

$$\rho(r) = \frac{N_e}{r_M^2} f\left(s, \frac{r}{r_M}\right) \quad (2.5)$$

siendo  $r_M$  el radio de Molière de scattering múltiple (79 m a nivel del mar, 106 m a 2200 m de altura),  $r$  es la distancia perpendicular al eje de la cascada y la función  $f$  puede expresarse [70]:

$$f\left(s, \frac{r}{r_M}\right) = \left(\frac{r}{r_M}\right)^{s-2} \left(1 + \frac{r}{r_M}\right)^{s-4.5} \frac{\Gamma(4.5-s)}{2\pi\Gamma(s)\Gamma(4.5-2s)} \quad (2.6)$$

La expresión  $\rho(r)$  se conoce como la función NKG (Nishimura-Kamata-Greisen).

## 2.3 Cascadas atmosféricas hadrónicas

Al entrar en la atmósfera terrestre, el hadrón cósmico choca con un núcleo del aire y produce una cascada de hadrones y leptones secundarios, la *cascada hadrónica*. Esta cascada es, hasta cierto punto, una simple superposición de cascadas electromagnéticas (EM) individuales, puesto que el *core* hadrónico de la cascada produce continuamente  $\pi^0$  que dan lugar a subcascadas EM hasta aproximadamente el máximo. El crecimiento y la posición de este máximo están, no obstante, fuertemente ligados a los detalles de la interacción hadrónica y a la naturaleza de la partícula primaria.

La profundidad de la primera interacción depende de la longitud de interacción hadrónica, que es unos 70 g/cm<sup>2</sup> para protones y unos 15 g/cm<sup>2</sup> para núcleos de hierro a energías del PeV. Centrémonos en primer lugar en la cascada protónica.

En una colisión p-aire a estas energías, la partícula incidente pierde en media la mitad de su energía. En la mayor parte de los casos, se puede identificar el primario tras el choque. Se le llama entonces partícula principal. Esta fracción de energía perdida, que se usa para formar nuevas partículas, se suele llamar inelasticidad,  $K$ :

$$K = \frac{E_2}{E_0 + M_n} \quad (2.7)$$

siendo  $E_0$  la energía incidente,  $E_2$  la energía de la partícula principal después de la colisión y  $M_n$  la energía del blanco en función de su masa. La mayor parte de las partículas secundarias son piones. Partículas  $\pi^0$ ,  $\pi^+$  y  $\pi^-$  son producidas en aproximadamente las mismas cantidades. Los  $\pi^0$  se desintegran inmediatamente (vida media  $1.78 \cdot 10^{-16}$  s) en dos  $\gamma$  que generan sendas cascadas EM.

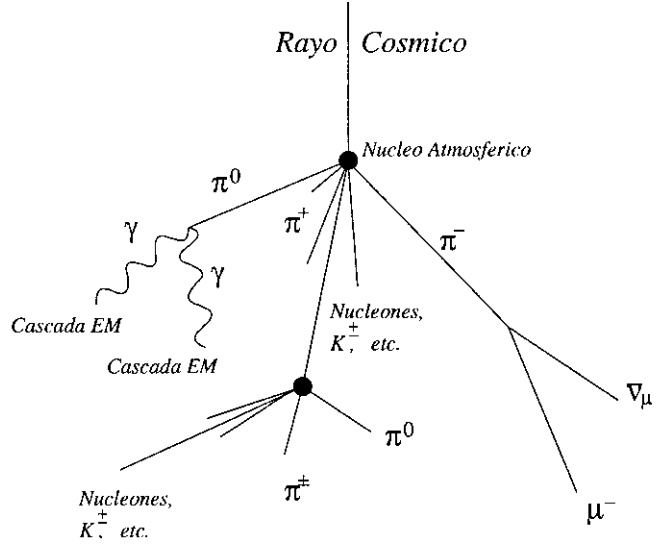
Los  $\pi^+$  y  $\pi^-$  siguen colisionando con otros núcleos del aire y produciendo partículas secundarias o bien se desintegran en muones. La mayoría de las partículas secundarias en una colisión  $\pi$ -aire son también piones.

Los nucleones y piones cargados secundarios que tienen la energía suficiente siguen multiplicándose en sucesivas generaciones de colisiones nucleares hasta que la energía por partícula cae por debajo de la mínima para la producción de piones, o sea, del orden de 1 GeV. Los piones cargados también se desintegran de acuerdo con las siguientes reacciones:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (2.8)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (2.9)$$

Figura 2.4: Diagrama esquematizado del desarrollo de una cascada hadrónica en la atmósfera (de [77]).



con vida media  $2.55 \cdot 10^{-8}$  s. Los muones apenas sufren interacciones hadrónicas y sólo son frenados por ionización. Decaen conforme a las reacciones:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (2.10)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (2.11)$$

de vida media  $2.2 \cdot 10^{-6}$  en sus sistemas de referencia. Para el observador externo, su vida media es, en cambio,  $2.2 \cdot 10^{-6} \gamma$ . Sólo aquellos muones que tienen factores de Lorentz  $\gamma > 20$  sobreviven al vuelo desde las capas más altas de la atmósfera donde son habitualmente producidos. Por consiguiente, los muones de más alta energía proporcionan un buen método de estudio de la componente hadrónica de la cascada y de las propiedades del RC primario.

El core hadrónico gobierna el desarrollo de la componente EM hasta el momento en que no son posibles más interacciones (energía media de los hadrones  $\sim 1$  GeV) y se dejan de producir  $\pi^0$ . En conjunto, la posición del máximo depende de tres factores. En primer lugar, las secciones eficaces inelásticas  $\sigma_{p-Air}^{inel}$  y  $\sigma_{\pi-Air}^{inel}$  que determinan la distancia que recorre el hadrón entre colisiones sucesivas. En segundo lugar, la elasticidad tal y como la hemos definido. Tanto  $K$  como  $\sigma^{inel}$  tienen una dependencia muy débil con la energía. El tercer factor es la multiplicidad, esto es, el número de secundarios producidos en los choques. Bajo la *hipótesis de escalado de Feynman*, la multiplicidad  $n$  vendría dada por:

$$n \propto \ln E \quad (2.12)$$

Sin embargo, la mayoría de los modelos hadrónicos violan esta hipótesis a estas energías, exhibiendo multiplicidades que crecen con la energía de forma

más rápida, entre  $E^{\frac{1}{4}}$  y  $E^{\frac{1}{2}}$ . A pesar de que los experimentos en aceleradores muestran que el escalado de Feynman se viola en la región central (gran momento transversal,  $P_t$ ), es aún incierto si también hay violación en la región de fragmentación (pequeño  $P_t$ ). La violación del escalado de Feynman acelera el desarrollo de la cascada, reduciendo  $X_{max}$ .

Los núcleos primarios se suelen fragmentar en la primera interacción, dando lugar a un cierto número de cascadas hadrónicas. Las colisiones son normalmente periféricas. Sólo unos cuantos nucleones interaccionan y producen una cascada de piones, pero el núcleo residual queda en estado excitado y generalmente acaba por desintegrarse. Hasta cierto punto, un núcleo de número atómico  $A$  y energía  $E_0$  se comporta como la superposición de  $A$  cascadas de energía primaria  $E_0/A$ . Esta hipótesis constituye el llamado *modelo de superposición*, que nos permite predecir el comportamiento de algunas de las propiedades de la cascada de forma sencilla. Como los protones tienen longitudes de interacción más largas que los núcleos de hierro, sufren la primera interacción a más profundidad. Además, según el modelo de superposición, las  $A$  subcascadas que resultan de la fragmentación del núcleo primario tendrán  $X_{max}$  menores que para protones primarios debido a su menor energía. Las fluctuaciones de las subcascadas se compensarán y, como consecuencia, los núcleos pesados exhibirán distribuciones de  $X_{max}$  con menos fluctuaciones.

## 2.4 Muones en cascadas atmosféricas

La forma del espectro de muones está ligada a la probabilidad de desintegración de piones y kaones. A su vez, esta probabilidad depende de la energía<sup>4</sup> del  $\pi$  y del  $K$ , del espacio disponible para la desintegración del muón entre el punto de producción y el suelo, y de la densidad de la atmósfera a la altura de producción, dado que ésta determina la probabilidad de que el  $\pi$  y el  $K$  interaccionen en lugar de desintegrarse. A energías de menos de 100 GeV, la desintegración es más probable y el espectro de  $\mu$  resultante tiene la forma del espectro de RC primarios. En cambio, los  $\pi$  y  $K$  suelen desintegrarse por encima de los 100 GeV y el espectro de  $\mu$  cae con una potencia de la energía.

En general, los montajes experimentales son distintos en estos dos rangos energéticos. Mientras los  $\mu$  de alta energía suelen medirse con detectores subterráneos a gran profundidad, bajo espesores de materia del orden de 1000-4000 g/cm<sup>2</sup>, los detectores con los que se estudian los  $\mu$  de baja energía (en torno a 1 GeV) suelen enterrarse bajo apenas unos metros de tierra. Este

<sup>4</sup>La longitud de desintegración es  $c\tau\gamma$ , siendo  $\gamma$  el factor de dilatación temporal relativista y  $\tau$  la vida media de la partícula en el sistema de referencia en reposo.

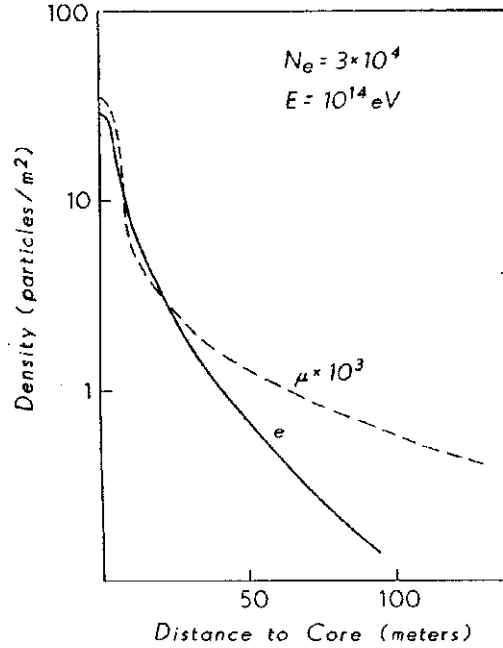


Figura 2.5: Comparación de las distribuciones laterales de muones y electrones. El trazo continuo representa la densidad de electrones. El discontinuo representa la de muones multiplicada por un factor  $10^3$  (de [75]).

espesor basta para absorber la componente hadrónica, electrónica y de rayos  $\gamma$ .

La distribución lateral de muones en tierra es más plana que la de electrones (ver figura 2.5). Se ha encontrado un buen ajuste [54] a:

$$\rho_{\mu}(r) = 18r^{-0.75} \left(1 + \frac{r}{320}\right)^{-2.5} \left(\frac{N_e}{10^6}\right)^{0.75} \quad (\text{muones}/m^2) \quad (2.13)$$

Por lo general, hay de 50 a 100 veces menos muones que electrones cerca del eje de la cascada, pero la distribución menos empinada los convierte en la componente dominante a distancias del orden de 1 km. Esto es determinante en el diseño experimental, porque hace que el muestreo de la componente muónica no haya de ser tan fino como el de la electrónica. En contrapartida, como la densidad de  $\mu$ 's es baja, los contadores deben tener cerca de 10 veces más superficie que los de electrones, si se quiere que las fluctuaciones poissonianas sean semejantes.

## 2.5 Radiación Cerenkov en las cascadas

La radiación Cerenkov que emiten las partículas cargadas de la cascada atmosférica da lugar a un frente de fotones que acompaña al frente de partículas. El ángulo de emisión crece con la profundidad atmosférica. Conforme descendemos, el punto de incidencia de los fotones en el suelo se aleja inicialmente del eje de la cascada hasta una distancia de  $\sim 110$  m (a 15 km de altura de emisión) y, a continuación, invierte el sentido del movimiento y vuelve hacia el eje dando lugar a la forma característica de la distribución lateral de luz que se refleja en la figura 2.6b. El scattering múltiple ensancha el pico alrededor de los 110 m de distancia al eje (habitualmente conocido como la *goroba* o *hump* de la distribución lateral) pero no lo borra por completo (figura 2.6c). El *hump* es un rasgo distintivo de las cascadas iniciadas por rayos  $\gamma$  frente a las iniciadas por hadrones para las que el momento transverso de las interacciones hadrónicas colabora con el scattering múltiple para hacerlo prácticamente invisible.

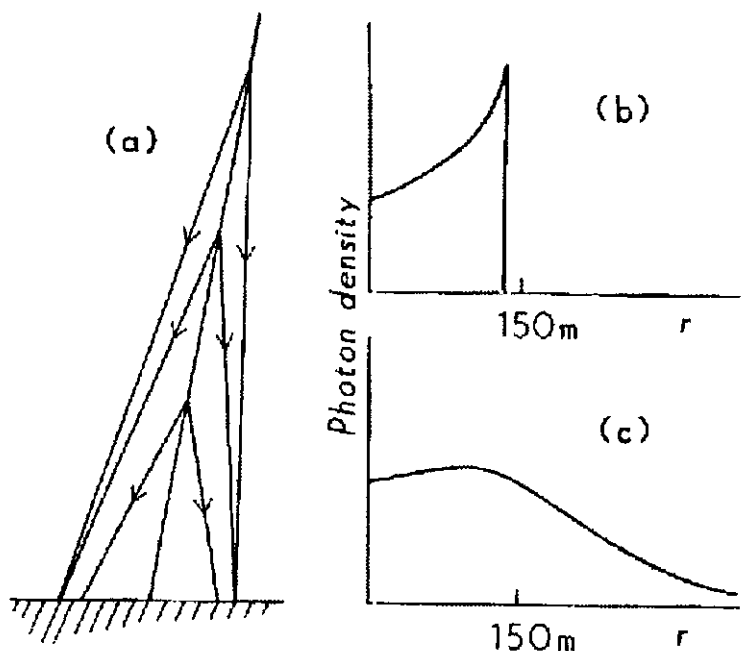


Figura 2.6: a) Emisión Cerenkov de una cascada a varias alturas, mostrando el cambio en el ángulo de emisión con el índice de refracción; b) Densidad de luz resultante en ausencia de scattering múltiple; c) Densidad de luz asumiendo un scattering realista (de [75]).

La distribución lateral de luz depende del desarrollo longitudinal de la

cascada. Hay un gran número de electrones que superan el umbral de producción Cerenkov. Una relación sencilla entre el número de electrones que emiten radiación y el número total de electrones en el máximo vendría dada por:

$$N(> E_{min}) = \frac{N_e}{1 + \frac{E_{min}}{30}} \quad (2.14)$$

con  $E_{min}$  en MeV y siendo  $N_e$  el número total de electrones. Para  $E_{min}=21$  MeV, cerca del 50% de los electrones radian. El flujo total de luz en el nivel de observación  $\Phi(E_0)$  es proporcional a la longitud total recorrida por todos los electrones de la cascada con energías superiores a  $E_{min}$ . Esto nos sirve para estimar la energía primaria. Puede probarse [78] que, de forma bastante aproximada:

$$\Phi(E_0) \simeq \phi(X_{max}) \int_0^{t_{obs}} N_e(E_0, t) dt \quad (2.15)$$

siendo

$$\phi(X_{max}) = \int_{E_{min}}^{E_0} \frac{dN}{dx} G(E, X_{max}) dE \quad (2.16)$$

y  $G(E, X_{max})$  el espectro normalizado de energía de los electrones en el máximo. Como consecuencia, el flujo total de luz es proporcional a la integral de la curva de la cascada por encima del nivel de observación.

Simulaciones de MC muestran que la pendiente de la distribución lateral de luz  $\rho(r)$  es una medida de la distancia a  $X_{max}$  [79]. La función  $\rho(r)$  ha sido parametrizada de múltiples formas. El grupo de Durham aplica la función [80]:

$$\rho(r) = K(r + r_0)^{-\alpha} \quad (2.17)$$

siendo  $r_0=50$  m y  $1 < \alpha < 4$ , demostrando que  $\alpha$  está correlacionado con la distancia  $H_m$  al máximo. De forma alternativa, otros grupos [81] usan una ley exponencial:

$$\rho(r) = K e^{-br} \quad (2.18)$$

o un parámetro [82, 83]:

$$M(r_1, r_2) = \frac{Q(r_2)}{Q(r_1)} \quad (2.19)$$

como medida de la pendiente de la distribución. Los parámetros  $b$  y  $M(r_1, r_2)$  también están relacionados con  $H_m$ .



## 2.6 Simulación por Monte Carlo de EAS

La simulación de la cascada en la atmósfera se ha realizado con el código CORSIKA [61] (versión 4.50) desarrollado por el grupo de Berre-Bordeaux-Karlsruhe para el experimento KASCADE [84]. CORSIKA (COsmic Ray Simulations for KASCADE) estudia la evolución de las cascadas atmosféricas iniciadas por gammas, protones o núcleos hasta energías de  $10^{17}$  eV.

El programa reconoce 16 partículas elementales ( $\gamma$ ,  $e^\pm$ ,  $\mu^\pm$ ,  $K_{S/L}^0$ ,  $K^\pm$ ,  $p$ ,  $n$ ,  $\bar{p}$  and  $\bar{n}$ ) y núcleos hasta  $A=56$ . Todas estas partículas se siguen a lo largo de la atmósfera mientras interaccionan, se aniquilan o se desintegran produciendo partículas secundarias. Algunas partículas de vida corta como el  $\rho$ ,  $\Sigma$  o el  $\Lambda$  sólo se consideran como etapas intermedias de la producción de partículas sin aparecer como partículas explícitas en la cascada. Los neutrinos procedentes de la desintegración del  $\pi$ ,  $\mu$  o  $K$  se descartan. Los piones neutros se desintegran inmediatamente en fotones  $\gamma$  debido a su vida media extremadamente corta. Los muones se transportan sin colisiones nucleares. Sí se tiene en cuenta la desintegración en electrones (positrones) y el scattering múltiple de Coulomb. Los hadrones cargados, en cambio, no sufren este scattering. Los neutrones se suponen estables. Y, aparte de todo esto, se tiene siempre en cuenta la pérdida continua de energía que sufren la partículas cargadas por ionización del aire y la deflexión que causa el campo magnético terrestre.

Las coordenadas de CORSIKA se definen respecto a un sistema cartesiano cuyo eje X positivo apunta al norte magnético, el Y positivo al oeste y el Z hacia arriba. Su origen se sitúa a nivel del mar.

La atmósfera consiste en  $N_2$ ,  $O_2$  y Ar en fracciones de volumen de 78.1%, 21.0% y 0.9% respectivamente. La variación de la densidad con la altura se parametriza siguiendo a J. Linsley, de acuerdo con la atmósfera americana estándar. Este modelo toma una atmósfera dividida en 5 capas. En las 4 inferiores, la densidad sigue una dependencia exponencial con la altura. En la quinta capa, el espesor decrece linealmente. El límite superior viene definido por la altura a la que la profundidad atmosférica  $t(h)$  se anula ( $h=112.8$  km).

En este trabajo se ha usado la opción de CORSIKA que produce dos ficheros de salida por cada cascada simulada, uno que guarda la información de las partículas que llegan al nivel de observación, y otro que almacena los datos sobre los fotones Cerenkov producidos en el desarrollo del EAS. El corte en energías fue fijado a 3 MeV para fotones  $\gamma$  y electrones.

Con vistas a estudiar la evolución de las cascadas en la atmósfera, desde la versión 4.068 el programa ofrece la posibilidad de conservar información sobre los desarrollos longitudinales de electrones y muones, así como las distribuciones laterales de electrones, gammas, muones y luz Cerenkov en el

suelo. Estas distribuciones se guardan en los ficheros habituales de salida. Se analizan los desarrollos longitudinales y se extrae la posición del máximo de la cascada. La distribución lateral de luz Cerenkov puede ajustarse a funciones exponenciales en distintos intervalos radiales así como las de  $\gamma$ 's y electrones también pueden adaptarse a varias parametrizaciones sugeridas en la literatura, como la de D.J. van der Walt [85], LPU [86] y NKG (ver capítulo 2).

### 2.6.1 Interacciones electromagnéticas

El código EGS4 [87] está incorporado en el programa para simular la parte electromagnética de la cascada. EGS4 trata, en el caso de electrones y positrones, la aniquilación, el bremsstrahlung y los scattering Bhabha, Møller y múltiple (siguiendo la teoría de Molière). Los rayos  $\gamma$  pueden sufrir scattering Compton, producción de pares  $e^+e^-$  y reacciones fotoeléctricas. Se han añadido la producción directa de pares  $\mu^+\mu^-$  y la reacción fotonuclear con protones y neutrones del aire. A pesar de sus reducidas secciones eficaces, estas reacciones son esenciales en la producción de muones en cascadas iniciadas por rayos  $\gamma$ . Se ha implementado también la dependencia barométrica de la densidad del aire en el seguimiento de las partículas.

### 2.6.2 Interacciones hadrónicas

Las interacciones débiles o electromagnéticas de la cascada se pueden simular de forma precisa. Las hadrónicas, en cambio, son aún objeto de gran controversia. Los colisionadores  $p\bar{p}$  nos dan información sobre secciones eficaces inelásticas y producción de partículas hasta energías de CM de 1.8 TeV (correspondiendo a  $E_{lab}$  de un protón incidente de 1.8 PeV). Los experimentos con iones pesados sólo alcanzan  $E_{lab} \sim 200$  GeV/nucleón. Pero casi ningún experimento registra partículas emitidas hacia delante y son estas partículas las que llevan casi toda la energía hadrónica en una cascada. Además, los cálculos exactos basados en la QCD no son viables, porque es éste un dominio en el que la QCD perturbativa no es aplicable: nos encontramos frente a interacciones *blandas*, en las que se produce un escaso intercambio de  $p_T$ . Por eso en los últimos años se ha venido utilizando un gran número de interacciones hadrónicas basadas en resultados experimentales. Se han realizado extrapolaciones a altas energías, pequeños ángulos y colisiones núcleo-núcleo con distintos grados de sofisticación.

CORSIKA 4.50 dispone de ciertas opciones para simular las interacciones hadrónicas en la cascada atmosférica. A  $E_{CM} > 10$  GeV, se pueden elegir entre dos modelos: el *modelo dual de partones* DPM [88] y el modelo VENUS

[62]. VENUS se basa en la teoría de Gribov-Regge y describe las interacciones blandas mediante el intercambio de uno o más pomerones. Las reacciones inelásticas se simulan cortando pomerones y creando dos cuerdas de color por pomerón, que luego se fragmentan en hadrones sin color. El DPM extrapola datos experimentales de bajas a altas energías y de protones a núcleos con ideas teóricas muy simples. Los núcleos se tratan como superposición de nucleones libres. Estos y algunos otros modelos han sido comparados en [89].

A  $E_{CM} < 10$  GeV, CORSIKA permite elegir entre el *modelo isobaro* [90], en el cual las colisiones hadrón-núcleo se aproximan como hadrón-nucleón, y el más detallado modelo GHEISHA [91].

En este trabajo, hemos adoptado siempre GHEISHA a bajas energías. Por encima de 10 GeV, hemos simulado las cascadas iniciadas por rayos  $\gamma$  y protones con el DPM y aquellas iniciadas por núcleos de helio, oxígeno y hierro con VENUS. CORSIKA ofrece varias opciones para afinar los modelos hadrónicos. En esta simulación, nos hemos decidido por los valores por defecto, o sea, que los nucleones blanco que sufren una colisión se han generado con la distribución de probabilidad de Glauber; se ha permitido el intercambio de carga en la partícula incidente; la *rapidity* fue simulada de la misma forma en  $\pi^0$  y piones cargados; y se ha supuesto la fragmentación total del núcleo primario.

### 2.6.3 Luz Cerenkov

La producción de luz Cerenkov está incluida en el CORSIKA 4.50 como una opción estándar (el procedimiento exacto viene descrito en detalle en [92, 77]). Los fotones Cerenkov son simulados en el rango de 300 a 500 nm de acuerdo con las fórmulas (2.5).

Debido al gran número de fotones que se producen en la cascada, es imposible generarlos y seguirlos todos de forma individual. Se recurre a juntarlos en grupos con un punto y un ángulo de emisión comunes que se tratan como un solo fotón. Para reducir el tiempo de cálculo, el tamaño de estos grupos se reduce con la energía incidente, siempre manteniendo un límite superior dependiente de  $E_0$  que minimice las fluctuaciones artificiales debidas al agrupamiento [77, 93].



## Capítulo 3

# Estructura de las fluctuaciones angulares

Las distribuciones laterales de partículas cargadas y fotones secundarios en el nivel de observación pueden parametrizarse mediante la fórmula NKG, vista en (2.5), la cual, por comodidad, se reproduce

$$\begin{aligned}\rho_e(r) &= N_e \frac{C(s)}{r_M^2} (r/r_M)^{s-2} (1 + r/r_M)^{s-4.5} \\ C(s) &= \frac{\Gamma(4.5 - s)}{2\pi \Gamma(s) \Gamma(4.5 - 2s)} \\ N_e &= \int_0^\infty 2\pi r \rho_e(r) dr\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $s$  es el parámetro de la edad y  $r_M$  es el radio de Moliere<sup>1</sup>. El parámetro  $s$ , que se relaciona con la pendiente de la distribución lateral, representa el estado de evolución de la cascada. Su valor es tanto mayor cuanto más alejado del nivel de observación se encuentre el máximo del desarrollo longitudinal. En todas las situaciones, la dependencia con el ángulo polar de las distribuciones laterales en el área de detección sólo interviene de manera geométrica debido a la posible inclinación del eje de la cascada, situación que no aporta novedades esenciales. Cuando el ángulo de incidencia es nulo no existe dependencia alguna de la densidad con el ángulo polar, considerándose las distribuciones angularmente uniformes.

Este modelo de parametrización que, en el fondo, describe la llamada *cascada media*, debe ser entendido como un modelo de regresión a la NKG, lo

---

<sup>1</sup>Para la altitud sobre el nivel del mar a la que se encuentra el detector HEGRA[77] su valor es 106 m como se mencionó en §2.2.

cual supone que las posibles fluctuaciones que se puedan encontrar con respecto a este comportamiento medio deben ser puramente aleatorias y gaussianas, es decir, debe tratarse de un ruido sin correlación o ruido blanco cuya descripción probabilística sea Normal. En términos de la PSD esto significa que  $P(k)$  es una constante, y por tanto independiente de  $k$ . Por todo ello, el modelo de la cascada media considera por hipótesis que

$$\rho_e(r, \theta) = \rho_e(r) + w(r, \theta) \quad (3.2)$$

donde  $w(r, \theta)$  es un ruido blanco gaussiano con valor medio nulo  $\langle w(r, \theta) \rangle = 0$ . Si bien existe una dependencia con el parámetro de la edad  $s$  en este esquema, esto no altera en absoluto la uniformidad angular que posee la distribución NKG. Para  $r$  fijo tenemos por tanto un modelo de regresión de media constante o uniparamétrico.

En este trabajo se pone en cuestión la validez de la hipótesis simplificadora de uniformidad angular que reduce las fluctuaciones a un mero ruido blanco presumiblemente de tipo gaussiano. Veremos que un estudio detallado de las fluctuaciones<sup>2</sup> que se observan en la distribución angular de partículas secundarias de un EAS muestra una estructura compleja que no tiene explicación en el marco del modelo de cascada media[95, 96]. Más aún, las leyes de escala satisfechas por los datos en la forma en que se van a disponer apuntan hacia una descripción en términos de multifractales, permitiendo de este modo que la complejidad puesta en evidencia, pueda ser modelizada de una manera relativamente simple[96].

---

<sup>2</sup>El análisis de las fluctuaciones presentes en datos experimentales es una técnica usada por muchos autores para destacar la complejidad presente en los sistemas objeto de estudio[94].

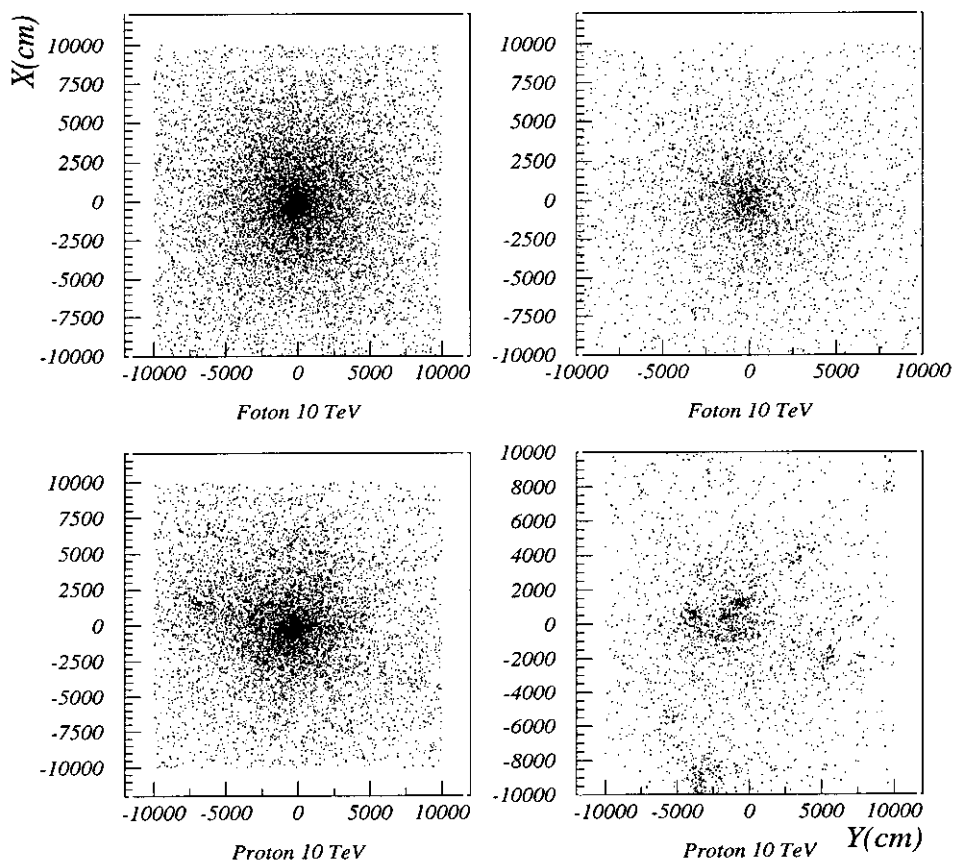


Figura 3.1: *Partículas secundarias en el plano de observación para un área de  $4.10^4 \text{ m}^2$  con el core situado en el centro geométrico. Las imágenes corresponden a dos protones y dos fotones primarios de 10 TeV de energía.*

### 3.1 Representación unidimensional de los sucesos simulados

Los sucesos simulados con el Monte Carlo CORSIKA 4.50 consisten en el registro de todas las partículas secundarias supervivientes en el desarrollo longitudinal de la cascada atmosférica. La información contenida en los ficheros de salida incluye el tipo de partícula y su posición en coordenadas cartesianas respecto al core, considerado como origen de un sistema cartesiano de coordenadas.

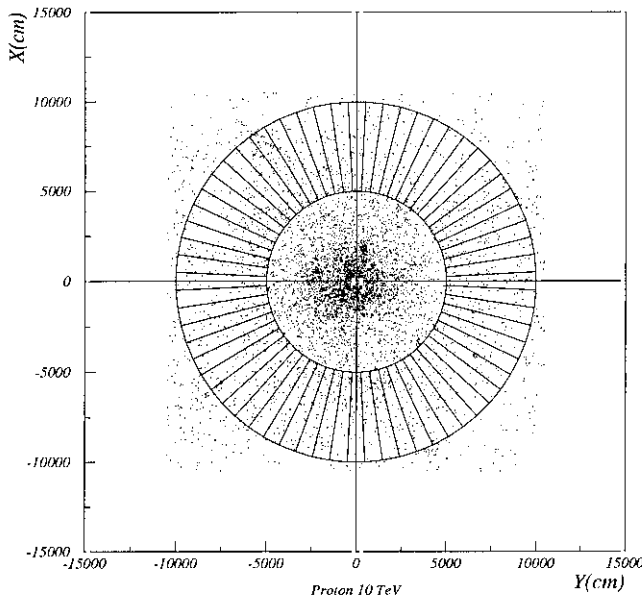


Figura 3.2: *Región del plano de observación donde se sitúan los sectores en análisis lejano sobre los que se realiza la medida del número de partículas. Por simplicidad, sólo se representa hasta 64 sectores.*

La figura 3.1 muestra el aspecto que ofrece la distribución lateral de  $e^\pm + \gamma$  para un suceso de tipo electromagnético (a) y otro de tipo hadrónico (b). La presencia de inhomogeneidades o *grupos* de partículas secundarias de gran intensidad es característico de los sucesos hadrónicos, aunque también se presentan en menor medida en los electromagnéticos<sup>3</sup>.

El estudio de las fluctuaciones en la densidad de partículas para las distribuciones bidimensionales de datos es una tarea compleja, pues

ha de tenerse en cuenta que debemos extraer del comportamiento medio, es decir, de la NKG, la fluctuación correspondiente a la posición considerada. Una vez obtenido el campo bidimensional de fluctuaciones  $w(r, \theta)$  hay que analizar su estructura de correlación y la distribu-

<sup>3</sup>Diversos autores han observado asimismo fluctuaciones de naturaleza no estadística en la luz Cerenkov emitida por el EAS en su desarrollo [97].



ción de probabilidad asociada. Estas tareas mínimas en la caracterización estadística de los sucesos conllevan operaciones de gran complejidad en el caso bidimensional. Todo esto nos lleva a intentar representar unidimensionalmente las fluctuaciones con objeto de simplificar en lo posible el análisis sin perder las características esenciales del suceso representado.

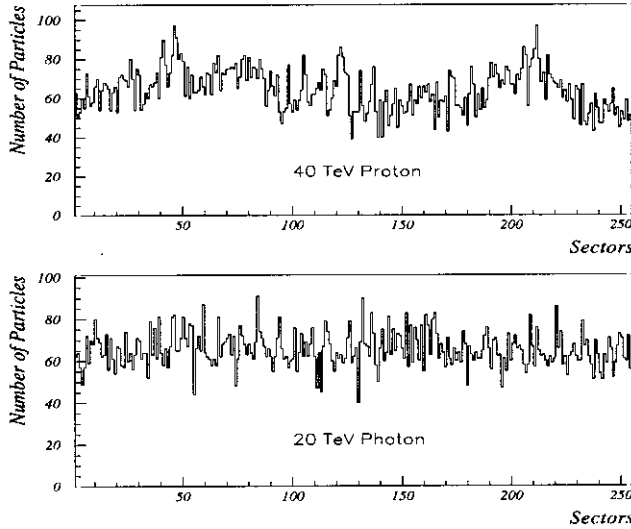


Figura 3.3: Densidad de partículas para dos sucesos de distinto tipo y similar número medio de partículas recogidas en la corona.

entre los radios interior y exterior  $r_{int}$  y  $r_{ext}$  de la corona. La corona no deberá estar demasiado alejada del core para que pueda contener un número suficiente de partículas y reducir la contribución de las fluctuaciones poissonianas<sup>4</sup>. Tampoco debe estar muy próxima, en principio, debido a que en las proximidades del core es donde llegan la mayoría de las partículas, según la NKG, y por tanto las fluctuaciones podrían enmascarse en un fondo de señal demasiado alto<sup>5</sup>. Teniendo en cuenta los tamaños de las

Vamos a tomar una corona circular centrada en el core, la cual se dividirá en sectores iguales en los que contaremos el número de partículas que han llegado procedentes del EAS generado por un rayo cósmico primario [98]. De este modo cada suceso individual queda representado por un conjunto de  $N$  (número de sectores) datos que representan la distribución angular de partículas secundarias para distancias promediadas

<sup>4</sup>Existen otras razones para considerar coronas alejadas del core. Un examen de las distribuciones bidimensionales revela que los grumos se encuentran con mayor frecuencia en las zonas alejadas del core debido posiblemente a que, en los sucesos hadrónicos, son el resultado de la superposición de subcascadas electromagnéticas producidas por los  $\pi^0$  secundarios en la primera interacción con la atmósfera, los cuales presentan una componente no nula de momento en la dirección transversal al eje de la cascada  $P_t$ .

<sup>5</sup>Este argumento, como después se verá, no resulta cierto ya que se encuentra un com-

cascadas, que vienen impuestos por la energía de las mismas y por  $X_{max}$  (2.1.2), se ha elegido tomar coronas de radios  $r_{int} = 50 \text{ m}$  y  $r_{ext} = 100 \text{ m}$  las cuales se van a dividir en  $2^8$  sectores. Al análisis efectuado tomando estas coronas lo llamaremos *análisis lejano*. Mas adelante realizaremos los cálculos sobre coronas próximas al core para completar este trabajo denominando a tal operación *análisis cercano*. La figura 3.2 muestra el área elegida para representar los sucesos en el análisis lejano, la cual se divide solo en 64 sectores iguales por cuestiones prácticas de representación.

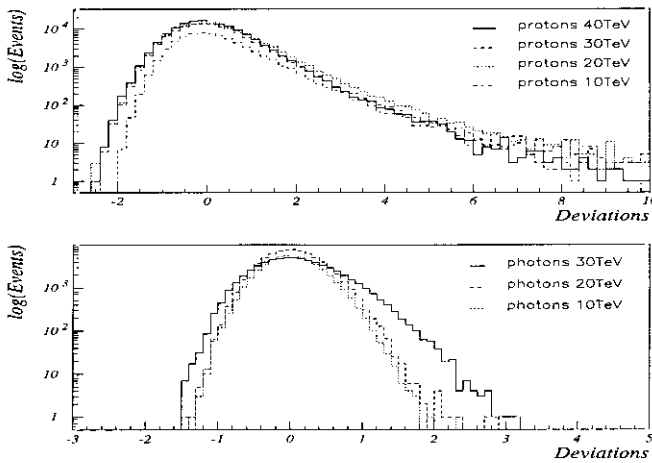


Figura 3.4: Desviaciones respecto del valor medio en la corona para diversos tipos de primarios.

Por las razones expuestas más arriba, la distribución angular se espera que sea aproximadamente constante con el ángulo polar (o equivalentemente con la variable discreta o índice que represente a cada sector) acompañada de las siempre presentes fluctuaciones cuya estructura nos proponemos estudiar. La figura 3.3 muestra las distribuciones de partículas para análisis

lejano correspondientes a dos sucesos que poseen un número medio de partículas similar, un protón primario de 40 TeV y a un fotón de 20 TeV de energía, ambos en incidencia vertical. En el ejemplo elegido se pone de manifiesto que los protones presentan fluctuaciones mucho mas acusadas que los fotones. Los picos altos pueden corresponder a los grumos detectados en los diagramas bidimensionales. Este comportamiento no es excepcional, pudiendo afirmarse que para sucesos de uno u otro tipo de primario y de la misma energía, los protones presentan con una frecuencia mucho mayor que los fotones fluctuaciones que pueden catalogarse de violentas o si se prefiere, excesivamente positivas respecto de la media del suceso. La afirmación ante-

portamiento similar de las fluctuaciones en regiones cercanas al core aunque con importantes matizaciones. Además, en la referencia [98] puede encontrarse un estudio que podríamos considerar como preliminar en el que se analizan las fluctuaciones en zonas extremadamente próximas.

rior es fácilmente cuantificable histogramando las desviaciones sector a sector respecto del valor constante esperado para cada suceso realizando además esta operación suceso a suceso. La figura 3.4 muestra la distribución de las desviaciones respecto del valor medio para protones y fotones poniendo de manifiesto en primer lugar la no gaussianidad de estas y en segundo lugar la presencia, más acusada en los protones que en los fotones, de colas hacia el lado de las desviaciones positivas cuya naturaleza nos proponemos explicar. Aunque cabe la duda razonable acerca de si estas colas tienen un origen poissoniano, mas adelante se mostrará que variando la resolución, es decir el número de sectores por corona, dichas colas siguen apareciendo, pudiéndose afirmar que se trata de un efecto intrínseco al proceso multiplicativo que genera los sucesos y relacionado con una propiedad de invariancia de escala, característica de los procesos con propiedades fractales.

3.2 Librería de sucesos simulados

Para realizar el estudio de las fluctuaciones se ha generado una librería de sucesos cuyas características se resumen en la tabla 3.1. Debemos ha-

Database	Tipo de Primario	Energía (TeV)	Número de Sucesos
200p60	protón	60	200
266p50		50	266
589p40		40	589
409p30		30	409
500p20		20	500
500p10		10	500
134γ60	γ	60	134
170γ50		50	170
200γ40		40	200
200γ30		30	200
384γ20		20	384
591γ10		10	591

Tabla 3.1: Composición de la librería generada, clasificada por energía del rayo cósmico primario. Para todos los casos, la incidencia es vertical, es decir, bajo un ángulo azimutal de 90<sup>0</sup>.

cer en este momento algunas consideraciones a propósito de la librería. En primer lugar, hay que recordar que los sucesos se han generado utilizando el código CORSIKA 4.50, el cual permite la simulación de EAS teniendo como parámetro de entrada, entre otros, la energía del rayo cósmico pri-

mario que va a dar origen a la cascada atmosférica. Debido a la enorme dispersión que presenta la posición del máximo desarrollo de la cascada, a energía fija del primario, sucesos provenientes de primarios de similar energía y restantes características idénticas pueden dar lugar a EAS de tamaño muy diferente[99, 77]. Esto trae como consecuencia el que exista gran dispersión en el valor medio del número de partículas en la corona para sucesos provenientes del mismo tipo de primario con la misma energía. En la práctica, esto puede introducir en nuestro análisis unas fluctuaciones de *colectividad* que se superponen a las existentes en cada suceso individual. Por ello, se han clasificado los sucesos generados por el tipo de primario y por el número de partículas que han dejado en la corona. Una razón de peso que puede aducirse en apoyo de tal clasificación es que mientras que la energía de un EAS no puede determinarse con precisión, la estimación del número de partículas es relativamente sencilla. La tabla 3.2 resume esta clasificación considerando *bines* de 2500 partículas de amplitud en los que se agrupan los sucesos de energía arbitraria. El número de bins considerado no agota todos los sucesos generados, quedando fuera del análisis los que dejan un gran número de partículas en las coronas. La razón para hacer esto es que los sucesos de ese tipo son escasos y su agrupamiento daría lugar a una muestra de dudoso valor estadístico.

Database	Primario	$\Delta N_s$	$N_{p1}$	$N_{p2}$
$N_1$	protón	0-2500	706	553
$N_2$		2500-5000	572	408
$N_3$		5000-7500	450	324
$N_4$		7500-10000	284	257
$N_5$		10000-12500	186	215
$N_6$		12500-15000	104	187
$N_7$		15000-17500	75	117
$N_1$	$\gamma$	0-2500	514	349
$N_2$		2500-5000	359	323
$N_3$		5000-7500	201	204
$N_4$		7500-10000	161	129
$N_5$		10000-12500	110	101
$N_6$		12500-15000	119	108
$N_7$		15000-17500	79	67

Tabla 3.2: Características de la librería cuando los sucesos se clasifican por el número de partículas que dejan en la corona. Aquí  $N_{p1}$  y  $N_{p2}$  son los números de sucesos que han dejado un número de partículas secundarias en las coronas lejana y cercana respectivamente, dentro del bin  $\Delta N_s$ .

Por otro lado, nos interesa no solamente el estudio de las fluctuaciones y

su estructura sino que entre nuestros objetivos también se encuentra el diseño de un posible método de separación de los diferentes primarios de la librería basado precisamente en las propiedades mostradas por las fluctuaciones. Por esta razón y sabiendo que en astronomía de rayos gamma, la señal válida es la suministrada por los rayos  $\gamma$  primarios y el *ruido* lo constituye fundamentalmente los protones primarios, se han generado con preferencia estos dos tipos de primario,  $\gamma$  y  $p$ .

En todos los casos generados, el ángulo de incidencia del primario con respecto al plano del área de observación es de  $90^\circ$ , aunque esto no supone restricción alguna en nuestro análisis debido a que para ángulos de incidencia distintos basta considerar un plano perpendicular a la dirección de incidencia para que nuestras argumentaciones continúen siendo válidas. Se trata, pues, de un problema geométrico. Para un suceso con dirección de incidencia no vertical, nuestra corona se deforma a una corona elíptica a la que puede aplicarse una transformación adecuada para conseguir pasar a una situación de incidencia vertical. La figura 3.5 muestra estos efectos geométricos en la representación unidimensional de los sucesos. Sin perjuicio de la generalidad o de efectos esenciales al análisis que vamos a realizar, se considera por tanto como básico el caso de la incidencia vertical.

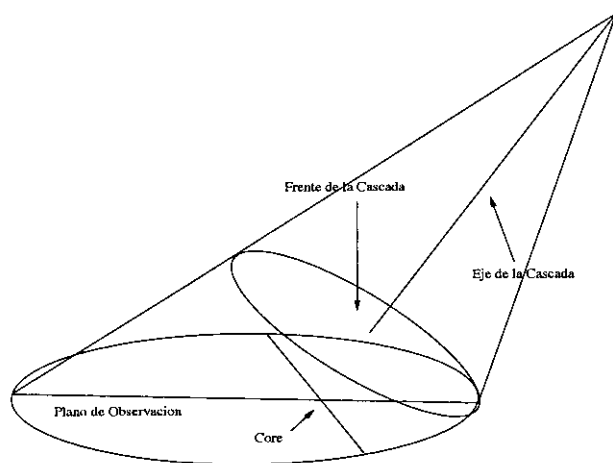


Figura 3.5: *Efectos geométricos derivados de la inclinación del eje de la cascada.*

Finalmente se considera que el core está perfectamente determinado y se sitúa en el centro geométrico del área de detección o en otras palabras, las coronas, tanto en el análisis cercano como en el lejano, van a estar completamente contenidas dentro de dicha área. Sin embargo en la realidad los cores no están determinados con precisión infinita<sup>6</sup> y pueden ocupar cualquier posición tanto dentro como fuera del área de detección. Aun en estas situa-

ciones, bastará con que una porción significativa de las coronas sea accesible para poder efectuar nuestro análisis. Consideraremos por simplicidad e igual-

<sup>6</sup>En la siguiente sección se discutirá brevemente el efecto que produce la imprecisión en la determinación del core.

mente sin pérdida de generalidad, los casos mas favorables para el estudio de las fluctuaciones, es decir, aquellos en que la corona en el llamado análisis lejano es completamente accesible para la medición.

### 3.3 Análisis de la librería

Cuando se trata de estudiar las fluctuaciones que presenta una señal es habitual preguntarse por el aspecto que esta puede tomar cuando se repite el experimento que da como resultado dicha señal. Las diferentes *realizaciones* del experimento pueden ser bastante similares, diferenciándose tan solo en la forma fluctuante que se superpone a alguna *tendencia* generalizada manifestada por la señal que se observa y que es considerada la parte significativa del fenómeno que se analiza. Las fluctuaciones sobre la tendencia se consideran ruido sin correlación alguna de modo que no aportan nada nuevo a la modelización global que se realiza. Tal comportamiento es bien conocido y generalmente se acepta que existe un modelo de regresión que puede encajar con los datos experimentales del que se obtiene una forma funcional para la tendencia, considerándose el ruido residual como un resultado de la incertidumbre del proceso de medición.

Si, por el contrario, las distintas realizaciones de un experimento dan lugar a señales de aspecto muy diferente entre sí, no identificándose claramente tendencia alguna, los modelos de regresión suelen fallar. En estos casos debemos hacer uso de la teoría de los procesos estocásticos, identificando la señal como una realización concreta de un proceso cuyas propiedades deben ser encontradas para su posterior modelización. Las fluctuaciones ya no pueden ser separadas, como en el caso anterior, de un comportamiento global que describe completamente el experimento, pues ellas guardan una valiosa información sobre la dinámica misma del proceso. Pueden mostrar una estructura de correlación no trivial cuyo conocimiento resulta esencial para una descripción completa del sistema físico sobre el que se realiza el experimento. Por ello resulta de capital importancia saber si las fluctuaciones presentes en las señales disponibles tienen o no alguna estructura de correlación. Es, pues, necesario encontrar un criterio claro que nos permita elegir entre las dos posibilidades.

En los modelos de regresión que se suelen proponer habitualmente, se considera que la observación de la magnitud  $Y$ , la cual se supone dependiente de otra  $X$  y de un conjunto de parámetros  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , puede modelizarse de acuerdo con

$$Y_t = f(X_t; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + \epsilon_t \quad (3.3)$$

donde  $Y_t$  designa una observación o valor concreto de la magnitud  $Y$  cuando la magnitud  $X$  toma el valor concreto  $X_t$ . El término  $\epsilon_t$  define a una variable aleatoria que tiene las siguientes propiedades[30]:

1.  $\langle \epsilon_t \rangle = 0$
2. Los  $\epsilon_t$  no están correlacionados, es decir,

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-r}) = \langle \epsilon_t, \epsilon_{t-r} \rangle = 0 \quad \forall t, r \neq 0 \quad (3.4)$$

3. Los  $\epsilon_t$  se denominan *errores* y provienen de una distribución Normal.

Las propiedades anteriores pueden adoptar una formulación más generalista considerando la magnitud  $Y_t$  como variable aleatoria. En efecto, en el modelo de regresión se verifica que:

1.  $\langle Y_t | X_t \rangle = f(X_t; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  (media condicional)
  - $Var(Y_t | X_t) = \sigma^2$  independiente de  $X$  y de  $t$
2.  $Cov(Y_t, Y_{t-r}) = \langle (Y_t - f(X_t; \beta_i, i))(Y_{t-r} - f(X_{t-r}; \beta_i, i)) \rangle = 0$
3. La distribución de  $Y_t$  condicionada a  $X_t$  equivale a una distribución Normal de media  $f(X_t; \beta_i, i = 1 \dots n)$  y varianza  $\sigma^2$

En nuestro caso,  $Y_t$  representa el número de partículas en el sector  $X_t$ . El modelo concreto planteado aquí es el de *media constante* definido por la relación

$$Y_t = \beta_0 + \epsilon_t \quad (3.5)$$

Parece bastante claro que una estimación de la covariancia permitiría validar el modelo de regresión si esta resultase nula para todo valor de  $t$  y de  $r$

$$Cov(Y_t, Y_{t-r}) = \langle (Y_t - \langle Y_t \rangle)(Y_{t-r} - \langle Y_{t-r} \rangle) \rangle = 0 \quad (3.6)$$

Sin embargo, el cálculo directo de este estadístico presenta algunas complicaciones en nuestro caso. La más significativa es la relacionada con el tamaño de las realizaciones, la cual afecta a la precisión de la estimación de la covariancia como función de  $r$ . A pesar de ello puede utilizarse como test bastante fiable en el caso de que el modelo de regresión no sea válido, aunque en este trabajo se va a emplear otro que se considera más apropiado.

El test que vamos a emplear para este modelo de regresión consiste en el examen de la PSD correspondiente a un gran número de realizaciones o

sucesos la cual mide la correlación o covariancia de las variables  $Y_t$ . Como ya se mencionó en los capítulos precedentes, la estimación de la PSD,  $P(k)$ , para un proceso estocástico unidimensional se realiza con la ayuda de la transformada de Fourier de cada suceso individual de la muestra  $g(k)$ , calculando el promedio sobre el conjunto de realizaciones disponibles.

$$P(k) \approx \langle |g(k)|^2 \rangle \quad (3.7)$$

En este trabajo nos interesa más la dependencia de esta magnitud en  $k$  que el cálculo de su valor exacto, ya que en realidad vamos buscando alguna ley identificable con una propiedad de escalado.

Si  $\langle R(t, t + \tau) \rangle_x$  designa el promedio espacial a lo largo de todos los sectores de la función de autocorrelación  $R(t_1, t_2)$ , entonces se tiene que

$$\langle R(t, t + \tau) \rangle_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(k) e^{jk\tau} dk \quad (3.8)$$

Para *procesos estacionarios en sentido amplio* o WSS tenemos que

$$\langle R(t, t + \tau) \rangle = R(\tau) = \langle Y_t Y_{t+\tau} \rangle \quad (3.9)$$

Las expresiones anteriores afirman que la correlación entre dos sectores separados por una distancia  $\tau$ , es decir  $R(\tau)$ , es la transformada inversa de Fourier de la PSD  $P(k)$ . Como ya se mostró anteriormente en §1.4.2, si la PSD depende de  $k$  a través de una ley de potencias del tipo  $P(k) \sim k^{-\beta}$ , la función de autocorrelación debe obedecer a una ley similar  $R(\tau) \sim k^{\beta-1}$ .

La validez del modelo de regresión de media constante exige que la PSD sea la correspondiente a un ruido blanco, es decir,  $P(k) \sim \text{cte}$ , lo que equivale a afirmar que  $R(\tau) \sim \delta(\tau)$  o en otras palabras, no hay correlación alguna entre las variables aleatorias  $Y_t$  e  $Y_{t+\tau}$  para  $\tau \neq 0$ .

Ya que nuestra librería de sucesos se encuentra clasificada tanto por energías del rayo cósmico primario como por el número de partículas recogidas en la corona, ya sea esta lejana o cercana, parece natural analizar las fluctuaciones en todos los casos. Por ello, en las siguientes subsecciones se realiza un análisis de correlación para los dos tipos de corona teniendo en cuenta las dos maneras de clasificar los sucesos.

### 3.3.1 Clasificación por energía: análisis lejano

Aquí se presentan los resultados obtenidos por el análisis de correlación cuando se aplica a los sucesos clasificados por energía y representados unidimensionalmente por la señal dejada en la corona lejana. En las figuras 3.6



y 3.7 se representa, para los primarios de la librería con energías de 10 y 20 TeV, el logaritmo natural de  $P(k)$  frente al logaritmo de  $k$  para valores de este último parámetro comprendido entre  $k = 1$  y  $k = 128$ , que corresponde a la frecuencia máxima accesible, o de Nyquist, según la discretización efectuada. A la vista de estas figuras, se aprecia que  $P(k)$  solo se comporta como un ruido blanco, que es lo que cualquier modelo de regresión encuentra aceptable, a alto valor de  $k$ , mientras que para valores bajos, la gráfica de  $\log P(k)$  frente a  $\log k$  es *lineal*. Como primera conclusión del test realizado, se desprende que el modelo de regresión a una constante para caracterizar las fluctuaciones de la señal en la corona lejana no puede ser adoptado puesto que aparece un ruido que posee una estructura de correlación. La forma de la PSD sugiere que esta se puede descomponer en dos términos<sup>7</sup>

$$P(k) = P_\epsilon(k) + C \quad (3.10)$$

donde  $P_\epsilon(k)$  representa la parte de la PSD con las propiedades:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} P_\epsilon(k) \rightarrow 0$
- $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\log(P_\epsilon(k))}{\log(1/k)} \rightarrow cte$

y el segundo término  $C$  es una constante cuya interpretación es la de una componente de ruido blanco, que es lo que se espera en el modelo NKG, cuya naturaleza está relacionada con la operación de discretización de la señal y que algunos autores denominan ruido estadístico. El parámetro  $C$  tiene una interpretación física sencilla ya que corresponde al número medio (sobre la colectividad de sucesos) de partículas por sector en la corona, aunque, en la práctica, dicho número ha de ser dividido entre el número total de sectores para tener en cuenta la normalización adoptada por la rutina que evalúa la transformada rápida de Fourier. Para la librería clasificada por energía del primario, el valor de  $C$  es sensible al tamaño de la muestra, pues, para una energía dada, los sucesos con gran número de partículas tienen gran peso a pesar de que son mas improbables. Por ello, es preciso tener en cuenta la existencia una componente de error en la determinación de  $C$  debida a la limitación en el número de realizaciones disponibles para cada energía.

En este trabajo nos interesa especialmente la naturaleza y propiedades del ruido cuya PSD se comporta como  $P_\epsilon(k)$ . Para tratar de aislarlo es necesario el conocimiento previo del valor de la constante  $C$ . Una vez conseguido esto,

---

<sup>7</sup>Si se considera la señal  $s(x)$  que representa a cada suceso, donde  $x$  es una variable que representa a los sectores de la corona, como la suma de dos ruidos  $s(x) = \epsilon(x) + w(x)$ , con PSD dadas por  $P_\epsilon(k)$  y  $P_w(k) \equiv C$ , entonces  $P_s(k) = P_\epsilon(k) + P_w(k)$  si los ruidos  $\epsilon(x)$  y  $w(x)$  no estan correlacionados y  $\langle \epsilon(x) \rangle = 0$  (Apéndice C).

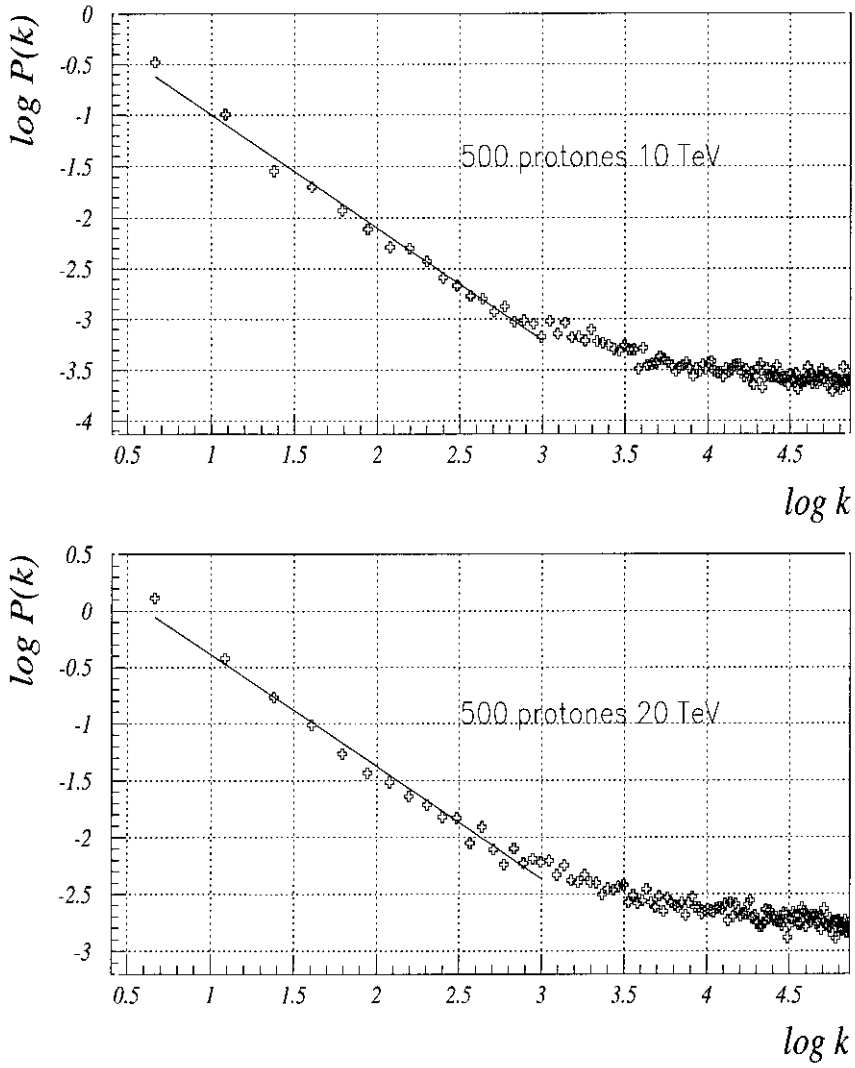


Figura 3.6: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de **protones** primarios de la librería clasificada por **energía**. Se aprecia en ellas el comportamiento asintótico indicado en el texto para los límites  $k \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow \infty$ .

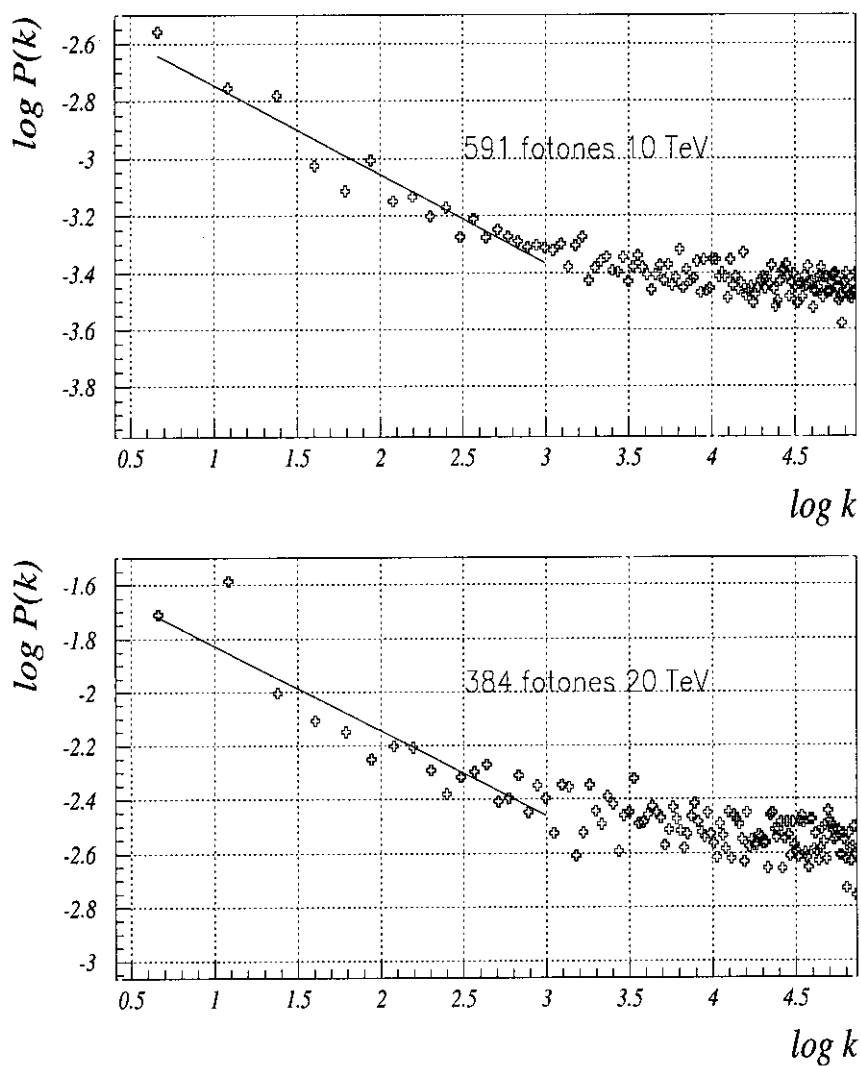


Figura 3.7: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de fotones primarios de la librería clasificada por energía. Se aprecia en ellas el comportamiento asintótico indicado en el texto para los límites  $k \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow \infty$ .

podremos efectuar un filtrado suceso a suceso con un filtro real cuya *función de transferencia* sea

$$h(k) = \sqrt{1 - \frac{C}{P(k)}} \quad (3.11)$$

Cuando la función  $P(k)$  que figura en (3.11) es la PSD numérica obtenida a partir de los datos, no haciéndose hipótesis alguna sobre su forma funcional, esta operación la denominaremos *filtrado intrínseco*<sup>8</sup>. Este filtro no tiene por misión eliminar de cada suceso individual componente alguna de ruido blanco sino mas bien ajustar cada PSD para que el promedio sobre la colectividad, representado por  $P(k)$ , se vea libre de la componente constante  $C$ <sup>9</sup>. Conviene no olvidar que lo importante en un proceso estocástico son sus promedios sobre la colectividad de realizaciones y no lo que ocurra con una realización concreta (con la excepción de los procesos denominados *ergódicos*).

La determinación de  $C$  no puede realizarse apropiadamente a menos que hagamos alguna hipótesis acerca de la forma funcional de  $P(k)$ , debido a que sólo disponemos de datos hasta el valor  $k = 128$ . En este trabajo, el valor de  $C$  se va a obtener realizando un ajuste de  $P(k)$  a la llamada PSD *modelo*,  $P_{mod}(k)$ , definida por la ecuación

$$P_{mod}(k) = \frac{A}{k^B} + C \quad (3.12)$$

El ajuste al modelo propuesto en (3.12) es bastante crítico respecto al valor del parámetro  $B$ , puesto que los valores de  $P(k)$  para  $k$  pequeño son los que contribuyen de manera significativa a su determinación precisa. Es fácil comprobar que el error que se puede cometer en la estimación de  $B$  es directamente proporcional al error relativo de  $P(k) - C$  el cual decrece a medida que aumenta el valor de esa diferencia, hecho que se produce a valores bajos de  $k$  en número tanto mayor cuanto más grande sea el valor de  $A$  comparado con  $C$ . Por tanto, a la vista de las figuras 3.6 y 3.7 es de esperar una fiable determinación de  $B$  para los protones y una peor estimación para los fotones. En todos los casos contemplados en la librería de protones, el parámetro

<sup>8</sup>En realidad hay que tomar el módulo de la expresión bajo la raíz ya que para valores grandes de  $k$  podemos encontrar que  $P(k) < C$  debido a las dispersiones.

<sup>9</sup>Si filtramos para cada suceso individual  $s(x)$  el ruido blanco  $w(x)$ , el ruido residual  $\epsilon(x)$  tendría la misma PSD que el resultante de la aplicación del filtro (3.11) sobre cada señal sólo si no existe correlación entre  $\epsilon(x)$  y  $w(x)$ , es decir,  $\langle \epsilon(x)w(x + \tau) \rangle \sim cte$ , lo cual es equivalente a afirmar que  $\langle C_\epsilon(k) \rangle = C$ , donde  $C_\epsilon(k)$  es el ruido blanco individual. Notese que podemos estimar correlaciones por la diferencia  $\langle \epsilon_F^*(k)w_F(k) \rangle + \langle \epsilon_F(k)w_F^*(k) \rangle = C - \langle C_\epsilon(k) \rangle$ , donde representamos las transformadas de Fourier por el subíndice  $F$  (Apéndice C).

$B$  es muy próximo a la unidad, mientras que para los fotones encontramos que  $B \sim 0.6 - 0.8$ . En las figuras 3.8 y 3.9 aparece el ajuste a (3.12) para las muestras más abundantes de protones y fotones mostrando, además, dos detalles del ajuste realizado. En este trabajo se propone adoptar para todos los primarios de la librería el modelo de PSD a dos parámetros

$$P_{mod}(k) = \frac{A}{k} + C \quad (3.13)$$

en el que tanto protones como fotones comparten un mismo valor de  $B^{10}$ . Los valores de los parámetros  $A$  y  $C$  y sus errores aparecen en la tabla 3.3. Si ahora filtramos los datos originales con ayuda de la función de transferencia

$$h_{mod}(k) = \sqrt{1 - \frac{C}{P_{mod}(k)}} = \sqrt{\frac{A}{A + kC}} \quad (3.14)$$

las PSD de los datos filtrados, que se pueden ver en las figuras 3.10 y 3.11, muestran, en representación logvslog, un comportamiento típicamente lineal

Sucesos	Partícula	E(TeV)	A	C	$\chi^2/ndf$
200	protón	60	3.5(1)	0.182(3)	1.0
266		50	3.12(8)	0.151(2)	1.0
589		40	2.27(5)	0.117(1)	1.2
409		30	1.69(4)	0.084(1)	0.9
500		20	1.06(2)	0.0524(6)	1.0
500		10	0.51(1)	0.0216(3)	1.0
134	$\gamma$	60	0.74(5)	0.299(3)	1.2
170		50	0.54(4)	0.244(2)	1.0
200		40	0.40(3)	0.190(2)	1.0
200		30	0.27(2)	0.129(1)	1.2
384		20	0.153(8)	0.0769(5)	1.5
591		10	0.063(3)	0.0315(2)	0.9

Tabla 3.3: *Parámetros  $A$  y  $C$  de la Power Spectrum Density media según el modelo propuesto en (3.13) para análisis lejano.*

con pendiente muy próxima a  $-1$  para todos los primarios de la librería.

<sup>10</sup>Existen poderosas razones para asumir que  $B \simeq 1$  ya que, como se verá en el capítulo siguiente, el ruido que resulta tras eliminar la parte correspondiente a la componente *blanca* tiene propiedades de escalado que sugieren una caracterización mediante teoría de (multi)fractales. Estas propiedades de invariancia frente a cambios de escala, típicas de estos *entes*, no se presentarían si tomásemos el valor de  $B$  que resulta del ajuste directo de los fotones a (3.12).

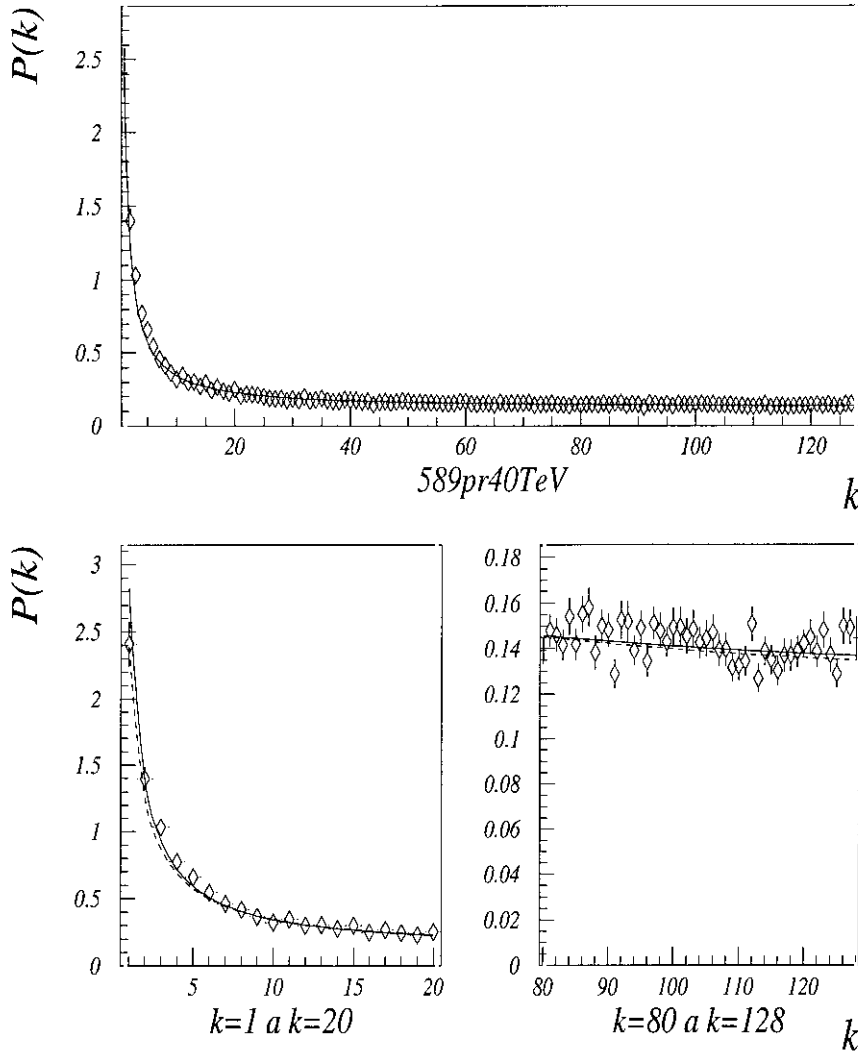


Figura 3.8: Ajuste del espectro medio de las muestras de **protones** de 40 TeV a la función (3.12) En los detalles inferiores se muestra, asimismo, el ajuste a (3.13) en línea de trazos poniendo de manifiesto el comportamiento crítico respecto al parámetro  $B$ .

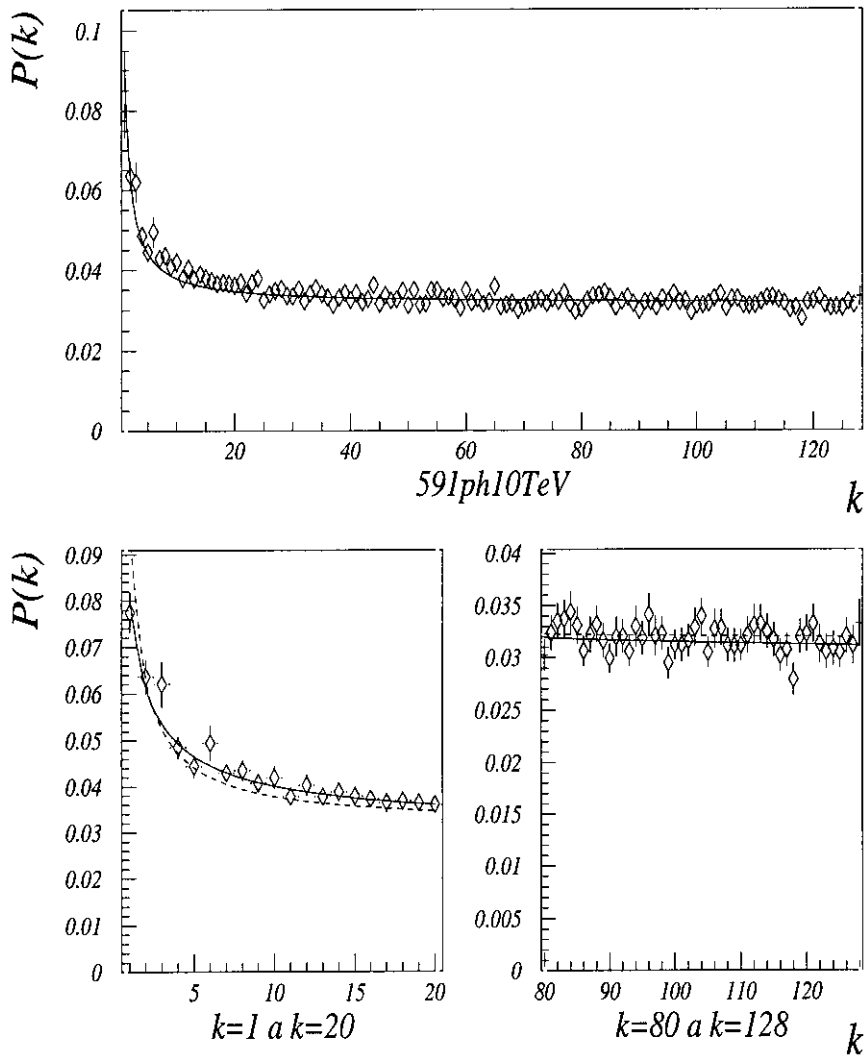


Figura 3.9: Ajuste del espectro medio de las muestras de **fotones** de 10 TeV a la función (3.12) En los detalles inferiores se muestra, asimismo, el ajuste a (3.13) en línea de trazos poniendo de manifiesto el comportamiento crítico respecto al parámetro  $B$ .

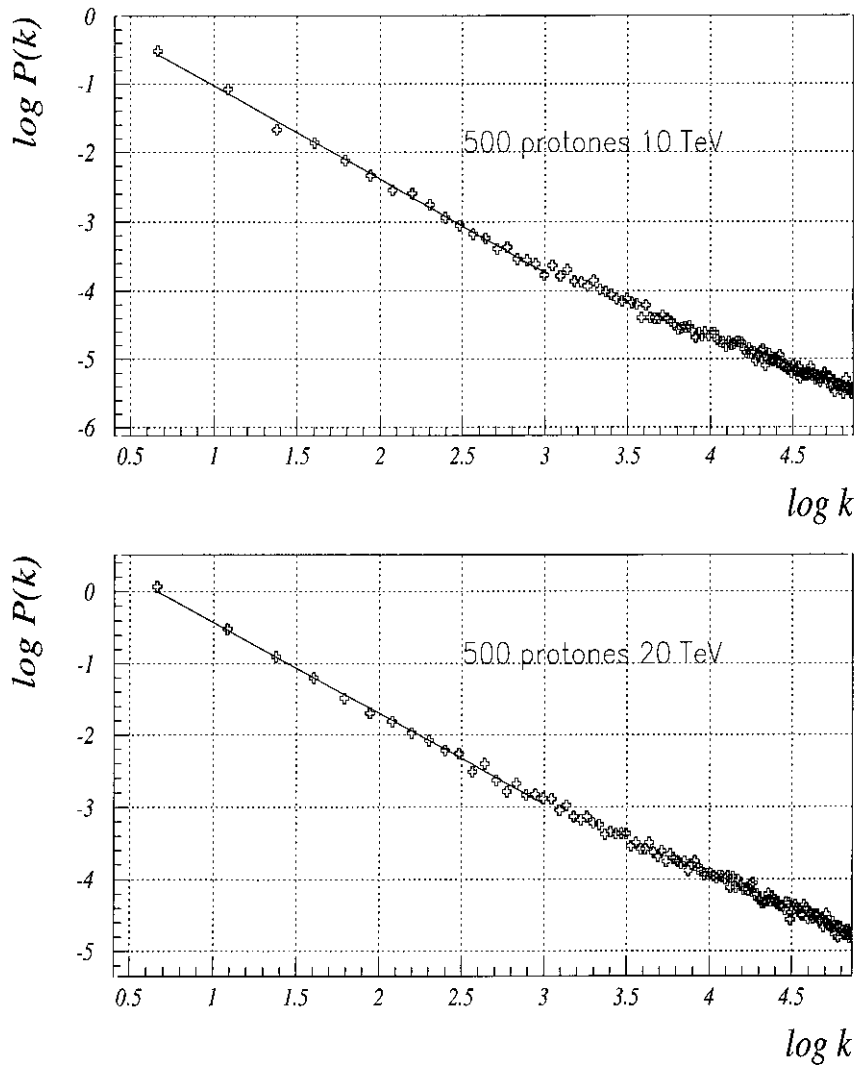


Figura 3.10: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de protones primarios de la librería cuando se filtra mediante (3.14).



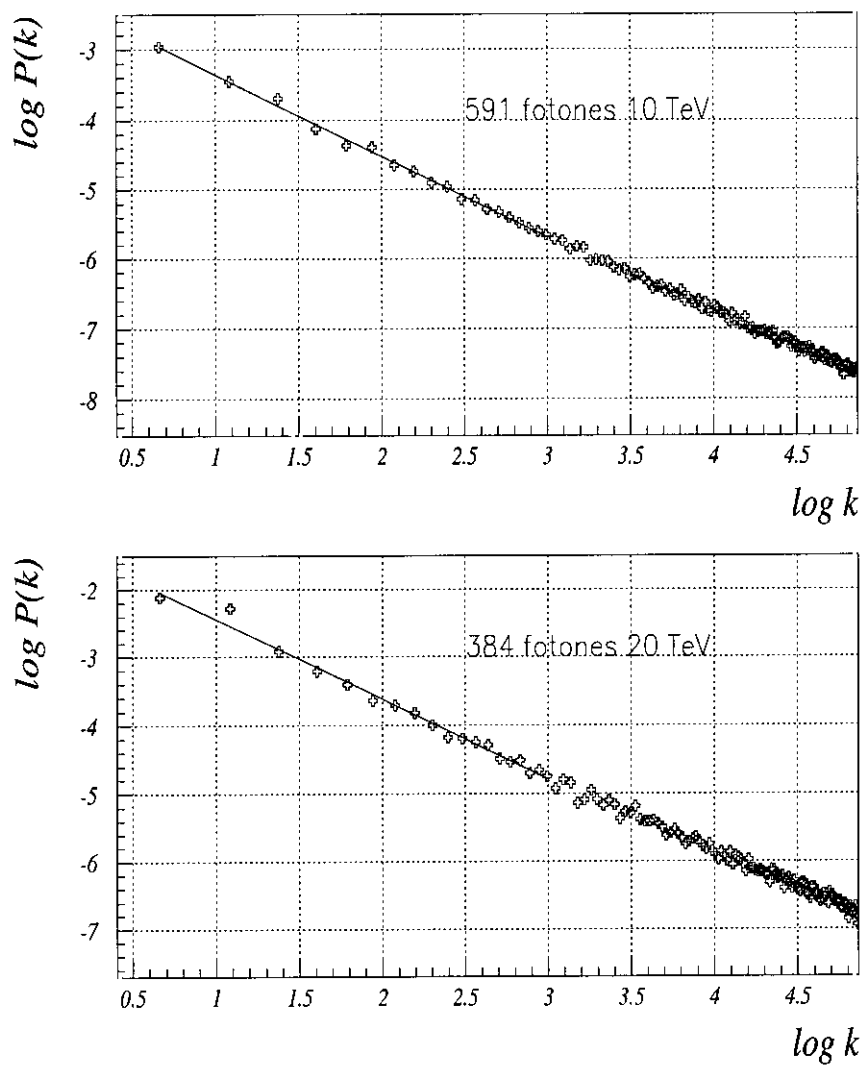


Figura 3.11: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de fotones primarios de la librería cuando se filtra mediante (3.14).

Puede probarse fácilmente(vease el apéndice C) que la aplicación del filtro  $h_{mod}(k)$  dado en (3.14) equivale a la obtención de una PSD dada por la ecuación

$$P_{fil}(k) = \frac{P(k)}{P_{mod}(k)} \frac{A}{k} \quad (3.15)$$

mientras que el filtro  $h(k)$  de la ecuación 3.11 conduce a una PSD

$$P_{fil}(k) = \frac{A}{k} + P(k) - P_{mod}(k) \quad (3.16)$$

donde recordamos que  $P(k)$  es la PSD numérica, es decir, la obtenida de la librería, y  $P_{mod}(k)$  es la PSD analítica que sirve de modelo a  $P(k)$ . Vemos en el primer caso que los sucesos filtrados tienen una PSD que se va a ajustar bien a la función  $A/k$ , siempre que la forma analítica sea la correcta, en todo el rango de valores de  $k$ , ya que el cociente  $P(k)/P_{mod}(k)$  no va a ser muy diferente de la unidad. En cambio, en el segundo caso tenemos un factor aditivo en la PSD de los sucesos filtrados. Es fácil ver que a grandes valores de  $k$  la PSD vendrá dominada precisamente por estas diferencias, las cuales tienen su origen, en parte, por el tamaño de la librería, pues es evidente que disponer de un enorme número de realizaciones de un proceso estocástico ayuda a una modelización más precisa del mismo. Como resultado, un filtrado intrínseco producirá gran dispersión en la PSD para valores altos de  $k$ , como realmente se observa en la práctica, sugiriendo la utilización del filtrado con  $h_{mod}(k)$  para preparar una librería que contenga exclusivamente el ruido residual cuyas propiedades se desea analizar. En la figura 3.12 se muestra los cambios producidos en dos sucesos de la librería por la aplicación del filtro  $h_{mod}(k)$ .

Para terminar, se discute sobre la incidencia en este análisis de la presencia de incertidumbres en la determinación del core de los sucesos. Resulta evidente que la representación unidimensional de los sucesos es sensible a la posición del core pues la corona se encuentra centrada en el. Es fácil demostrar que el efecto de tomar una pequeña desviación sistemática del core se traduce en una modulación de la señal en la corona que afecta solamente a la amplitud de la primera frecuencia del desarrollo de Fourier. Para ilustrar este hecho en la práctica, se han tomado las muestras de primarios de 30TeV para comparar los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$  cuando se considera el core:

- Centrado en el origen de coordenadas.
- Sistemáticamente desviado a la posición (150,150) en cm.

- Considerando posiciones distribuidas aleatoriamente con densidad uniforme dentro del disco centrado en el origen de radio 150 cm.

La tabla 3.4 muestra el valor de los parámetros en las tres situaciones, mostrando que, para las dos últimas, hay una variación sensible de los parámetros

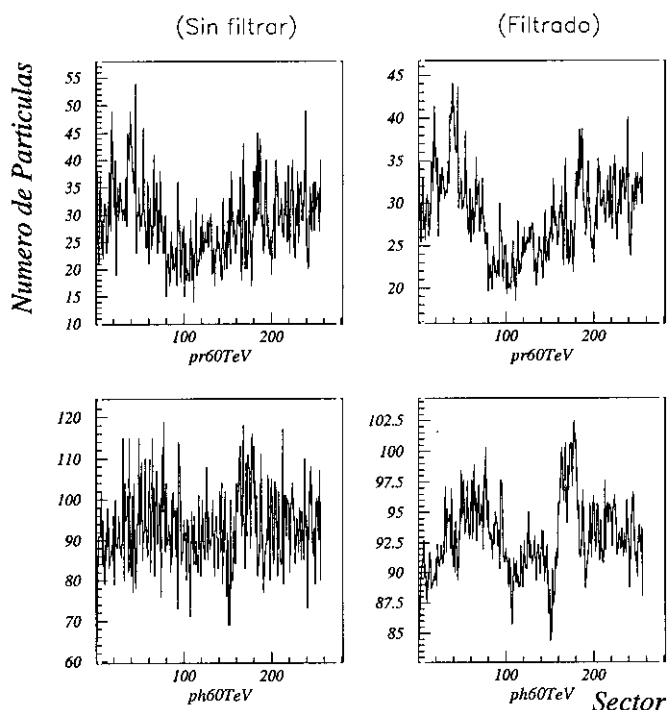


Figura 3.12: *Efecto sobre un protón y un fotón de 60 TeV del filtrado mediante (3.14).*

$A$  y  $B$ . Notemos que, para los fotones primarios, una desviación sistemática conduce a un valor de  $B$  alto y que, para el caso aleatorio, el incremento experimentado por el valor de  $A$  permite ajustar el valor de  $B$  a la unidad. La figura 3.13 expresa de manera gráfica los resultados anteriores, poniendo claramente de manifiesto que solo la amplitud correspondiente a  $k = 1$  se ve afectada por las incertidumbres posiblemente presentes en la determinación de la posición del core. Dejamos para el próximo capítulo el análisis pormenorizado del ruido residual tras ver lo que sucede cuando miramos en coronas cercanas al core.

Database	Posición Core	A	B	C
409pr30TeV	(0,0)	1.76	1.023	0.0857
	(150,150)	2.106	1.104	0.0892
	aleatorio	1.87	1.05	0.086
200γ30TeV	(0,0)	0.222	0.6886	0.1203
	(150,150)	0.679	1.45	0.131
	aleatorio	0.417	1.08	0.128

Tabla 3.4: *Parámetros A, B y C de la PSD media según el modelo definido en (3.12) para muestras de protones y fotones de 30 TeV de energía considerando el core en el origen coordenado, sistemáticamente desplazado a la posición (150cm,150cm) y ocupando una posición aleatoria cercana al origen.*

### 3.3.2 Clasificación por energía: análisis cercano

En la presente subsección nos proponemos dar los resultados encontrados cuando el análisis de correlación, que se efectúa a través de la PSD, se aplica a las coronas cercanas, es decir, a aquellas para las que  $r_{int} = 10$  m y

Sucesos	Partícula	E(TeV)	A	B	C	$\chi^2/ndf$
200	protón	60	20.0(5)	1.44(1)	0.351(5)	0.8
266		50	14.0(9)	1.40(4)	0.292(5)	1.2
589		40	12.3(4)	1.43(2)	0.218(2)	1.0
409		30	9.8(6)	1.43(3)	0.158(2)	0.9
500		20	6.3(5)	1.44(3)	0.095(1)	0.8
500		10	3.6(2)	1.54(3)	0.0405(5)	0.6
134	$\gamma$	60	2.6(2)	1.01(5)	0.510(1)	0.9
170		50	2.0(1)	0.96(4)	0.396(7)	1.0
200		40	1.26(8)	0.90(4)	0.297(5)	0.9
200		30	1.03(9)	0.99(5)	0.204(4)	1.0
384		20	0.57(3)	0.92(3)	0.116(1)	0.7
591		10	0.19(1)	0.87(3)	0.0449(4)	0.8

Tabla 3.5: *Parámetros A, B y C de la Power Spectrum Density media según el modelo  $P_{mod}(k) = \frac{A}{k^B} + C$  cuando se efectúa el análisis cercano. Se encuentra un ajuste no muy bueno a bajo k para los fotones en contraposición con el excelente ajuste para los protones.*

$r_{ext} = 50$  m. Las PSD muestran un aspecto bastante similar al encontrado en el análisis lejano por lo que se efectúa un ajuste a la función de 3 parametros (3.12). Las figuras 3.14 y 3.15 muestran el logaritmo de  $P(k)$  frente a  $\log k$  para los sucesos de 30 y 40 TeV. Los resultados del ajuste a (3.12) se muestran en la tabla 3.5 donde se consignan los errores estadísticos de A y B al comprobar que, sobre todo para los fotones, desaparece el comportamiento

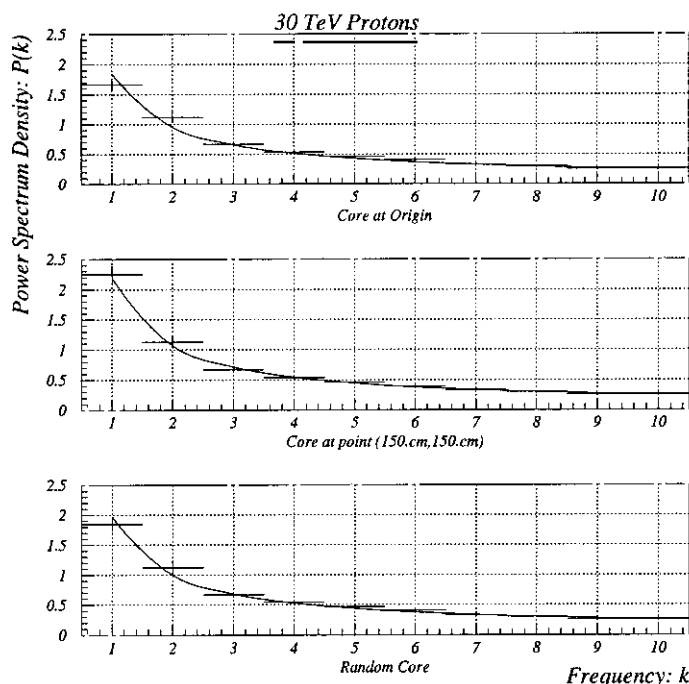


Figura 3.13: Representación de la PSD para protones de 30 TeV cuando la posición del core para cada suceso individual se toma: en su posición real (figura superior), en una posición desplazada al punto (150cm,150cm) (figura central) y en una posición aleatoria con distribución uniforme dentro del círculo de radio 150cm.

crítico en la determinación de  $B$ . En cuanto a los protones, es notorio el valor de  $B$  comprendido entre 1.4 y 1.5. Mas adelante volveremos sobre este particular y discutiremos el origen de estas diferencias entre los dos tipos de análisis, cercano y lejano.

Si, como se hiciera con el análisis lejano, fijamos el valor de  $B$  a la unidad, el ajuste de la PSD conduce esta vez a grandes errores, a bajo  $k$ , para protones y a resultados compatibles con la tabla anterior para fotones. En conclusión, para los sectores cercanos identificamos también *flicker noise*, es decir, ruido cuya PSD obedece a la relación  $P_e(k) \propto 1/k^B$  con  $0.5 < B < 1.5$ , en ambos tipos de primario con la particularidad de que para los protones el ruido es tal que  $B \approx 1.4$ . Tal tipo de ruido es *no estacionario* ya que supondría una correlación  $R(\tau)$  creciente con el intervalo de separación  $\tau$  en caso contrario. Conocemos muchos ejemplos de ruidos no estacionarios siendo uno de los

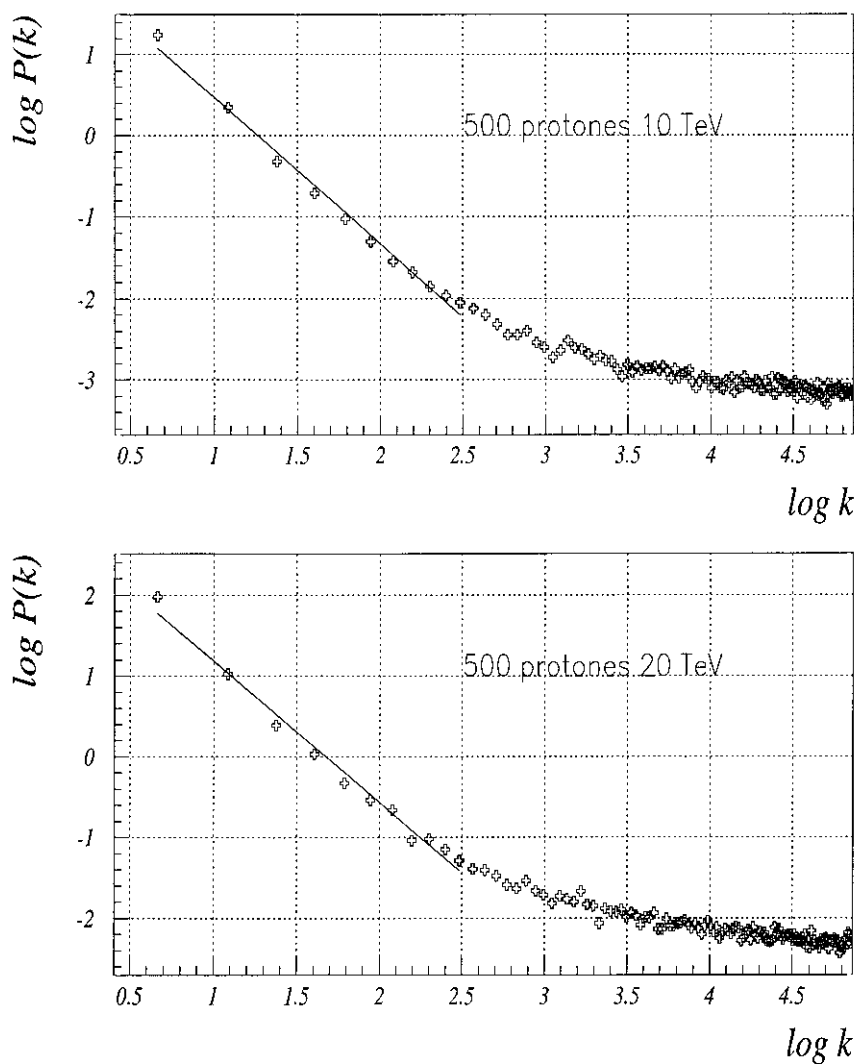


Figura 3.14: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de protones primarios de la librería en análisis cercano.

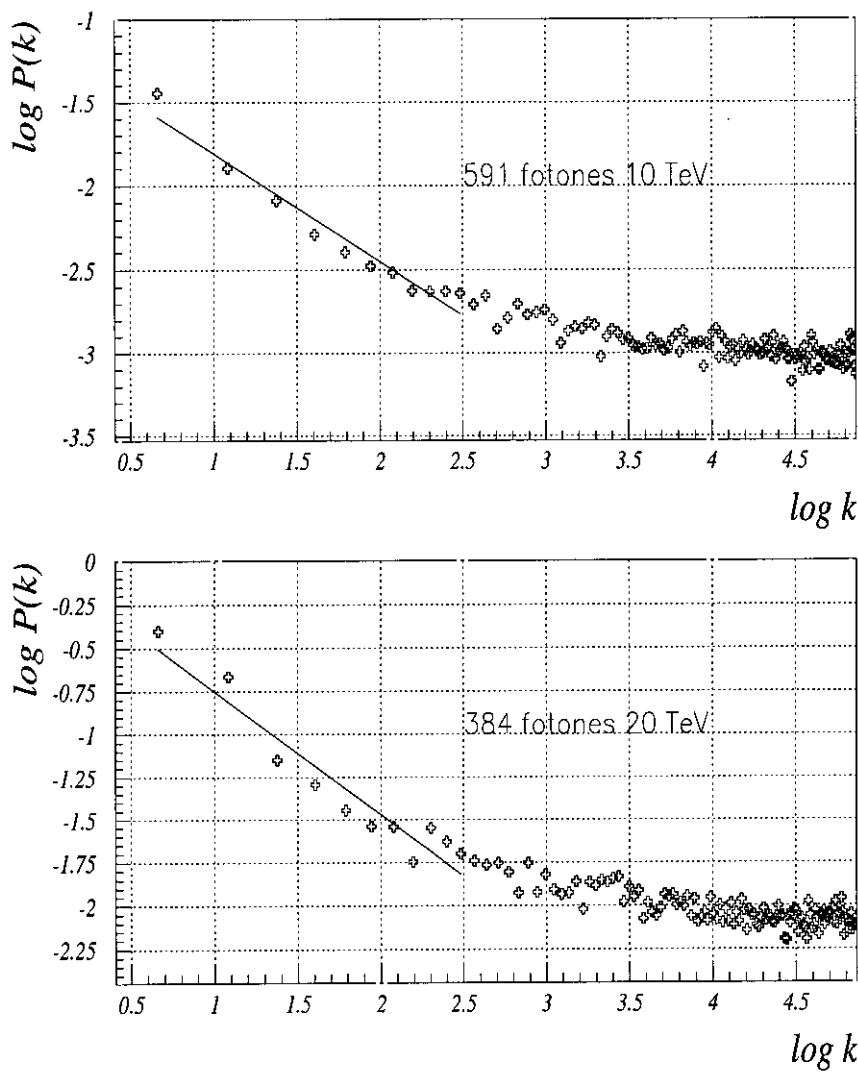


Figura 3.15: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de fotones primarios de la librería en análisis cercano.

Sucesos	Partícula	E(TeV)	H
200	protón	60	0.25(4)
266		50	0.23(2)
589		40	0.24(2)
409		30	0.24(4)
500		20	0.25(4)
500		10	0.27(4)

Tabla 3.6: Valores del parámetro  $H$  de no estacionaridad según las funciones de estructura.

más comunes el ruido browniano. A pesar de la no estacionaridad de este, su estudio se realiza a través de las funciones de estructura ya vistas en el apartado §1.4.2. Para poder aplicar el análisis por funciones de estructura hay que aislar primeramente la componente correlacionada de la señal cuya PSD es  $P_\epsilon(k) \propto A/k^B$ . Esto se realiza aplicando un filtro del tipo

$$\begin{aligned}
 h_{mod}(k) &= \sqrt{1 - \frac{C}{P_{mod}(k)}} = \sqrt{\frac{A}{A + k^B C}} \\
 P_{mod}(k) &= \frac{A}{k^B} + C
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

sobre cada suceso individual. En las figuras 3.16 y 3.17 se muestran las PSD de las bases de datos de protones y de fotones tal y como se ven después del filtrado con  $h_{mod}(k)$ . La tabla 3.6 recoge los resultados del análisis mediante funciones de estructura de los datos ya filtrados poniendo de manifiesto el grado de no estacionaridad de la señal en términos del parámetro  $H$ .<sup>11</sup>

### 3.3.3 Clasificación por $N_s$ : análisis lejano

En este apartado se muestran los resultados correspondientes al análisis de la señal en las coronas lejanas, cuando los primarios de la librería se clasifican por el número de partículas secundarias,  $N_s$ , que se recogen en aquellas. Según lo establecido en §3.2 y conforme a la tabla 3.2, se ajustan las PSD numéricas al modelo dado en (3.13) ya que, al igual que ocurría en §3.3.1, los protones presentan un buen ajuste con  $B \sim 1$  mientras que para los fotones los escasos puntos a bajo  $k$  útiles para el ajuste hacen crítica la evaluación de  $B$ . Las figuras 3.18 y 3.19 muestran, en representación

<sup>11</sup>El parámetro aquí considerado, a veces llamado exponente de Hurst y cuyo valor es nulo para señales estacionarias, coincide con el introducido en (1.5.3) bajo la denominación  $H_1$ .



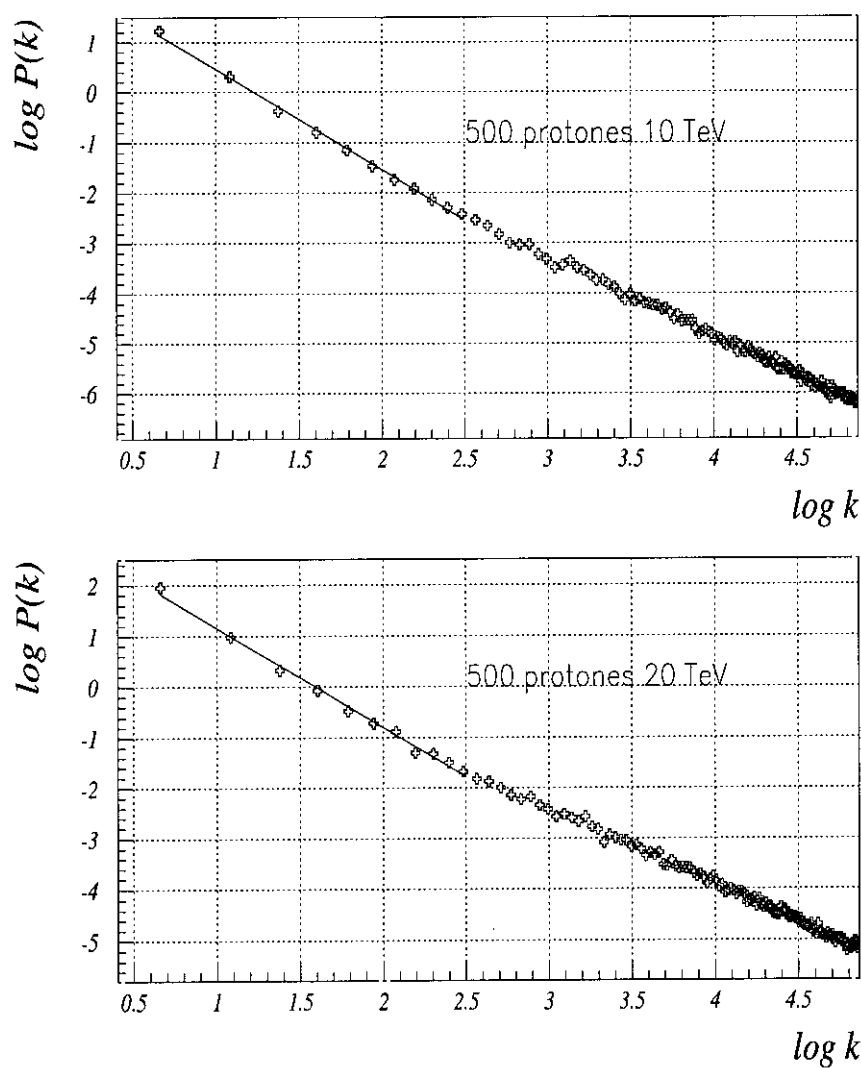


Figura 3.16: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de protones primarios de la librería, en análisis cercano, cuando se filtran mediante (3.18).

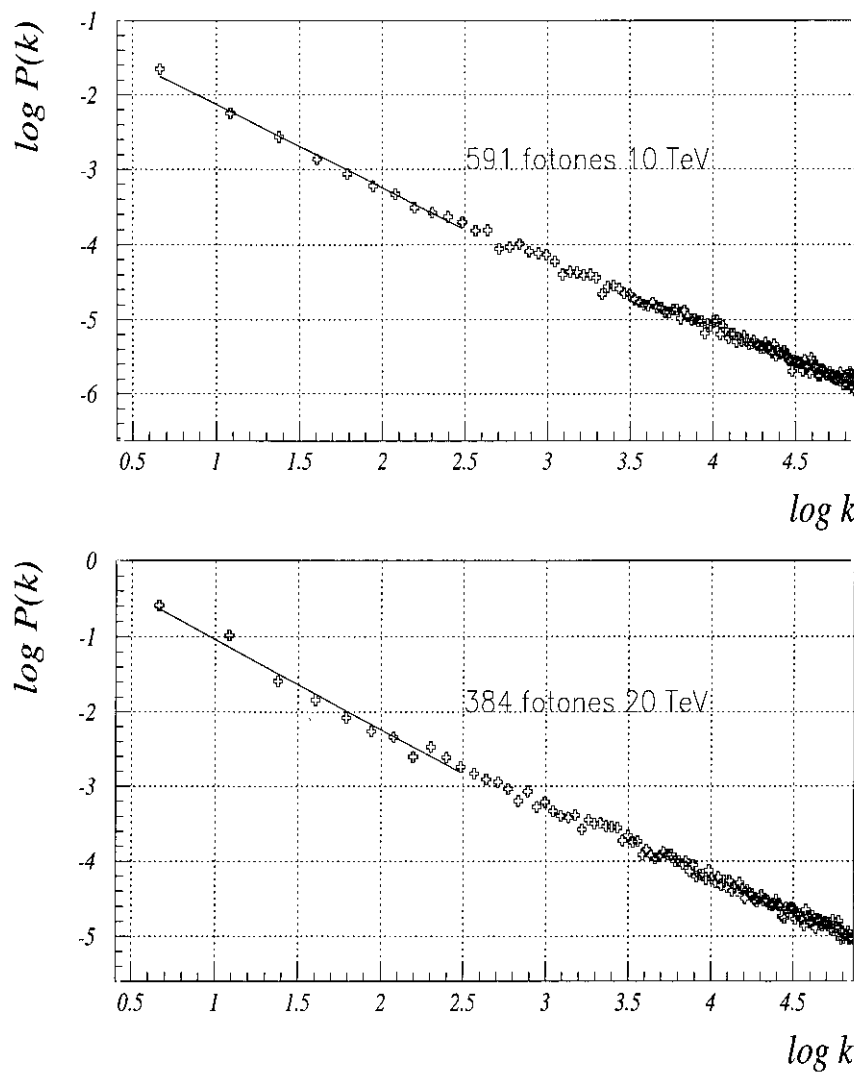


Figura 3.17: Representación logarítmica del espectro medio para dos muestras de fotones primarios de la librería, en análisis cercano, cuando se filtran mediante (3.18).

logarítmica, las PSD de los sucesos correspondientes a las bases de datos denominadas  $N_1$  y  $N_2$ , por ser las que más sucesos contienen. En ellas vuelve a apreciarse el comportamiento discutido en §3.3.1 que conduce al modelo de PSD mencionado anteriormente.

La tabla 3.7 refleja el valor de los parámetros  $A$  y  $C$ . De nuevo, el

Database	Primario	A	C	$\chi^2/ndf$
$N_1$	protón	0.46(1)	0.0192(2)	1.3
$N_2$		1.22(3)	0.0534(5)	1.2
$N_3$		1.92(4)	0.0906(9)	1.2
$N_4$		2.49(6)	0.128(1)	1.0
$N_5$		3.3(1)	0.161(2)	1.3
$N_6$		3.4(1)	0.203(3)	1.1
$N_7$		4.4(2)	0.236(5)	1.2
$N_1$	$\gamma$	0.054(2)	0.0252(1)	1.1
$N_2$		0.119(5)	0.0587(3)	1.6
$N_3$		0.21(1)	0.1005(7)	1.3
$N_4$		0.31(2)	0.143(1)	1.1
$N_5$		0.37(3)	0.178(2)	1.3
$N_6$		0.58(4)	0.218(2)	1.2
$N_7$		0.50(5)	0.263(3)	1.3

Tabla 3.7: Parámetros  $A$  y  $C$  de la PSD, según el modelo (3.13), cuando los sucesos se clasifican por el número de partículas que dejan en la corona lejana. Aquí  $N_1$  a  $N_7$  son los nombres simbólicos que reciben los grupos de sucesos clasificados (vease la tabla 3.2).

filtrado de los sucesos con (3.14) conduce a la eliminación del ruido blanco permaneciendo la componente de la señal cuya PSD obedece a una ley de potencias e identificable con un ruido  $1/f$ . Las figuras 3.20 y 3.21 muestran, en escala logarítmica, tal comportamiento.

### 3.3.4 Clasificación por $N_s$ : análisis cercano

Para terminar, se realiza el análisis de la señal en las coronas cercanas para los sucesos de la librería clasificados por el número de partículas secundarias  $N_s$ . En este caso, se realiza un ajuste al modelo definido por (3.12) cuyos parámetros se muestran en la tabla 3.8.

La aplicación del filtro definido por (3.18) conduce a la eliminación del ruido no correlacionado quedando la componente cuya PSD obedece a la forma  $\sim A/k^B$ . Para los protones, al igual que se obtuvo en §3.3.2, la PSD de la señal filtrada obedece a una ley de potencias de exponente  $B \sim 1.4$  con lo que puede ser clasificado como *flicker noise*. El valor encontrado para

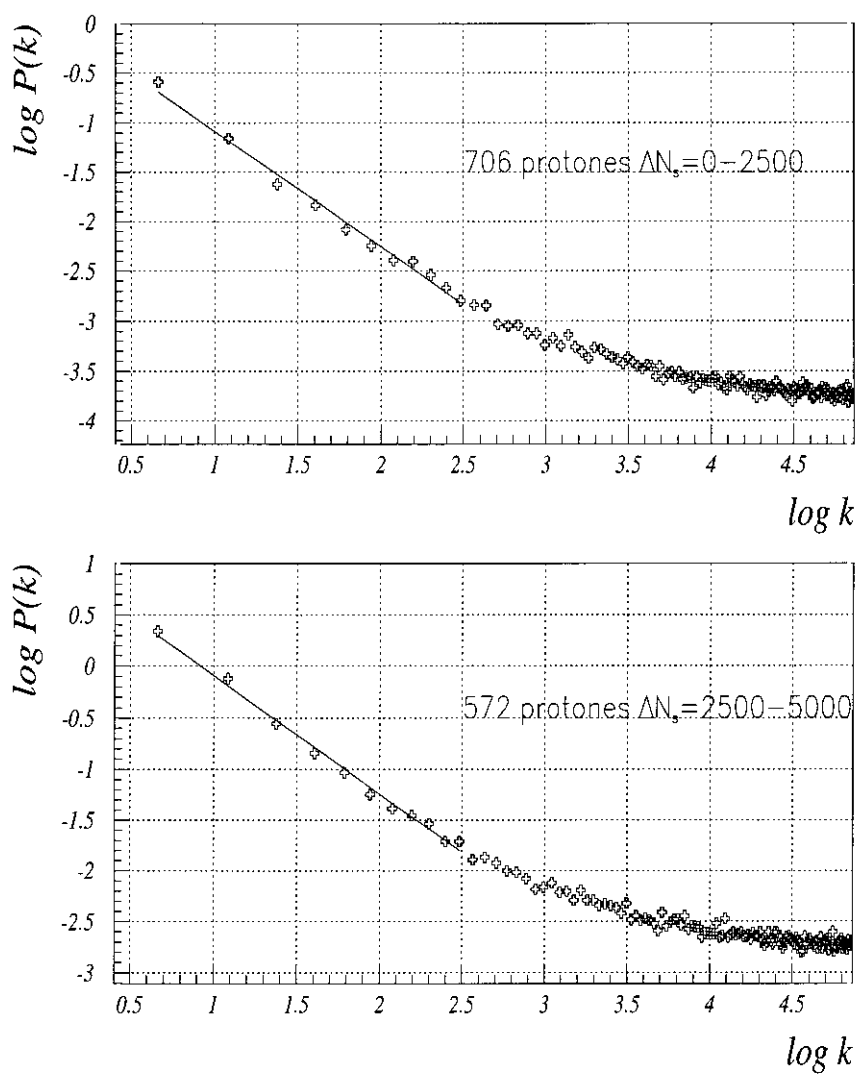


Figura 3.18: Representación logarítmica de la PSD para las muestras de **protones** primarios  $N_1$  y  $N_2$  de la librería clasificada por número de secundarias.

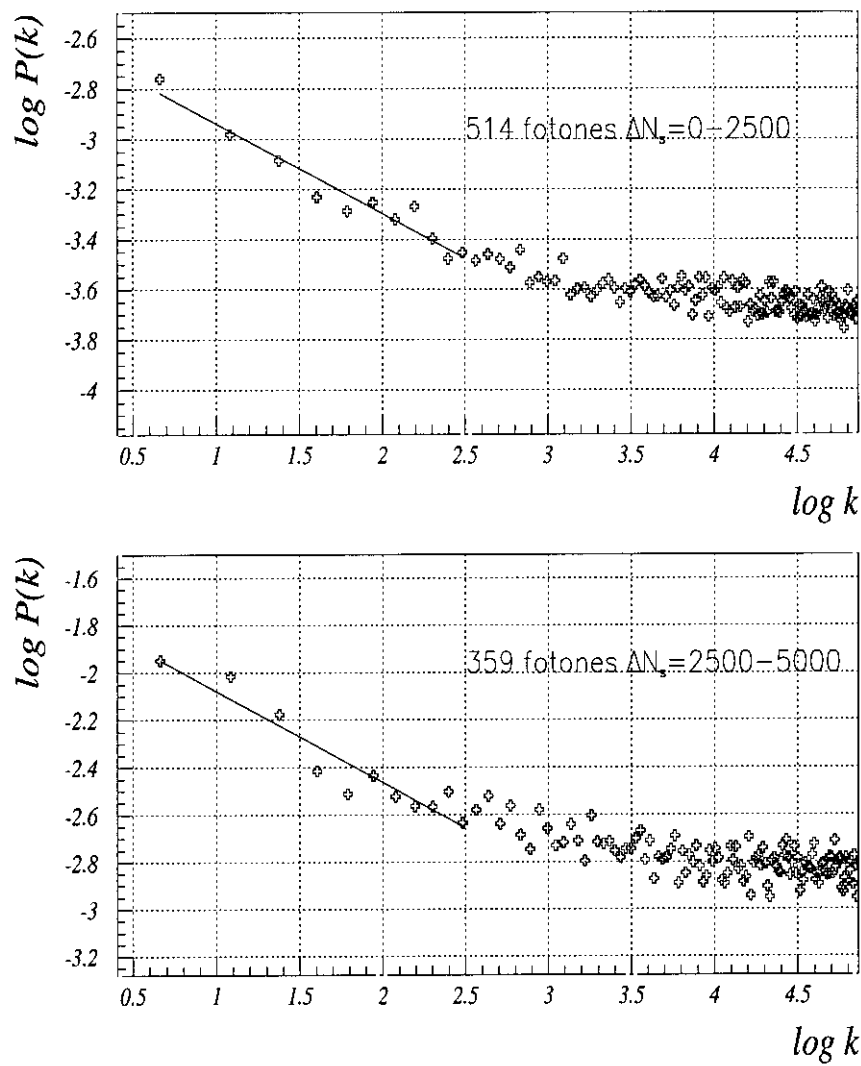


Figura 3.19: Representación logarítmica de la PSD para las muestras de fotones primarios  $N_1$  y  $N_2$  de la librería clasificada por número de secundarias.

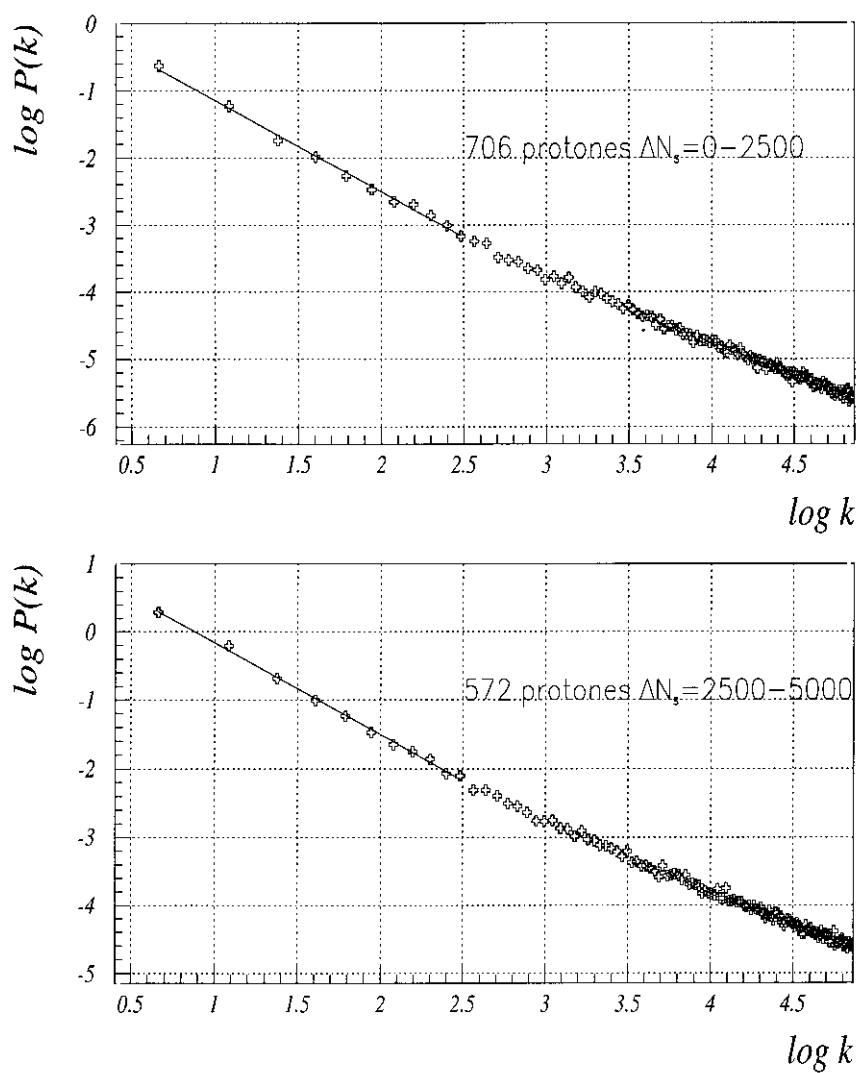


Figura 3.20: Representación logarítmica de la PSD para las muestras de **protones** primarios  $N_1$  y  $N_2$  de la librería clasificada por número de secundarias cuando se filtra mediante (3.14).

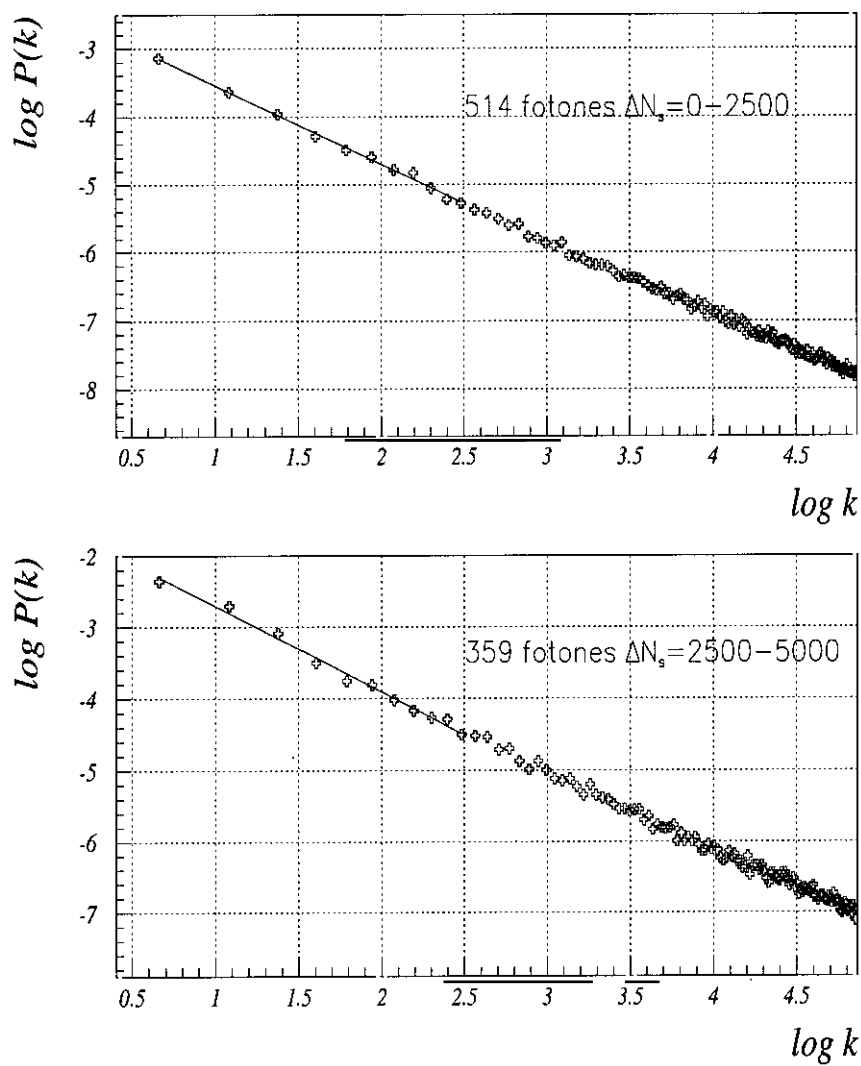


Figura 3.21: Representación logarítmica de la PSD para las muestras de fotones primarios  $N_1$  y  $N_2$  de la librería clasificada por número de secundarios cuando se filtra mediante (3.14).

Database	Primario	A	B	C	$\chi^2/ndf$
$N_1$	protón	1.09(5)	1.34(2)	0.0211(4)	0.9
$N_2$		4.8(2)	1.39(2)	0.0626(6)	1.2
$N_3$		8.9(4)	1.49(2)	0.106(1)	1.2
$N_4$		10.1(4)	1.49(2)	0.153(1)	1.2
$N_5$		12.9(7)	1.45(2)	0.187(2)	1.2
$N_6$		14.5(7)	1.44(2)	0.236(3)	1.1
$N_7$		21.(2)	1.51(3)	0.271(4)	1.2
$N_1$	$\gamma$	0.109(8)	0.92(4)	0.0258(3)	1.0
$N_2$		0.25(1)	0.91(3)	0.0566(7)	1.2
$N_3$		0.46(3)	0.88(4)	0.097(2)	1.0
$N_4$		0.58(5)	0.87(5)	0.134(3)	1.0
$N_5$		0.99(9)	1.04(6)	0.178(3)	1.0
$N_6$		1.1(1)	0.93(7)	0.212(6)	1.1
$N_7$		0.9(1)	0.74(6)	0.236(9)	1.0

Tabla 3.8: *Parámetros A, B y C de la PSD, según el modelo (3.12), cuando los sucesos se clasifican por el número de partículas secundarias que se recogen en la corona cercana.*

el exponente  $B$  revela igualmente el carácter no estacionario de la señal, la cual deberá someterse a la evaluación de las funciones de estructura a fin de extraer, si es factible, la parte estacionaria cuya PSD obedezca a una ley de potencias. Los exponentes de no estacionaridad  $H$  aparecen en la tabla 3.9, encontrándose muy similares a los hallados en el análisis por energía y reflejados en la tabla 3.6.

Database	Primario	H
$N_1$	protón	0.21(7)
$N_2$		0.22(7)
$N_3$		0.26(7)
$N_4$		0.26(7)
$N_5$		0.25(5)
$N_6$		0.25(7)
$N_7$		0.26(7)

Tabla 3.9: *Valores del parámetro H de no estacionaridad, según las funciones de estructura, para los protones clasificados por número de partículas secundarias.*



### 3.4 Resumen de resultados

En este capítulo se ha analizado la señal en las coronas cercana y lejana que han producido los dos tipos de rayos cósmicos primarios considerados. La posibilidad de clasificar los sucesos disponibles bien por energía del primario o bien por el número de partículas secundarias total que dejan en las coronas, nos lleva a estudiar las características de procesos estocásticos cuyas realizaciones atienden a dicha clasificación.

En todos los casos analizados se estudia la PSD del proceso definido por sus realizaciones a energía fija o a número de secundarias fijo para las dos coronas, encontrándose que puede ser modelada mediante una expresión general del tipo (3.12) que se interpreta como la suma de una señal con una ley de potencias en su PSD y de un ruido sin correlación y que, por tanto, tiene una PSD constante. Considerando la corona lejana, el modelo anterior se verifica siempre que  $B \simeq 1$ , lo cual es comprobable numéricamente para los protones y *supuestamente* válido para los fotones debido a la gran imprecisión con la que este parámetro puede ser determinado en este caso. En cuanto a la corona cercana, los resultados permiten afirmar que la señal dejada por los protones posee un valor de  $B$  mas alto que el que corresponde a una señal estacionaria, es decir  $B \leq 1$ , mientras que los fotones continúan ajustándose al modelo estacionario. Para los dos tipos de clasificación se encuentran unos valores de los parámetros del modelo que no presentan unas grandes diferencias. Además, el coeficiente  $C$  admite una interpretación física sencilla: es proporcional a la dispersión cuadrática de Poisson, como así lo demuestran los valores obtenidos para la clasificación por  $N_s$ .

El modelo que describe la PSD permite la eliminación de la componente *blanca* realizando un filtrado mediante el uso de (3.14) o (3.18), obteniéndose una señal con una estructura de correlación que obedece a una ley de potencias. Para los casos en los que se obtiene una señal no estacionaria, es necesario un análisis adicional de la no estacionaridad mediante las funciones de estructura, encontrándose en todos los casos que el comportamiento no estacionario se puede eliminar de modo sencillo.



## Capítulo 4

### Análisis del ruido $1/f$ residual

El hallazgo de una componente residual del ruido presente en las coronas, tanto lejanas como cercanas, y de tipo  $1/f$ , supone un cierto fracaso del modelo de regresión a una constante, en la medida en que dicho ruido no es explicable dentro de dicho modelo al poseer una fuerte correlación que, al mismo tiempo, tiene unas singulares propiedades. La teoría de las series temporales[8] (espaciales) o los procesos estocásticos, son los marcos ideales para poder integrar la posible correlación de los datos. En nuestro caso, esta correlación satisface una ley de potencias que, aunque solo es condición necesaria, también verifican muchos procesos con propiedades (multi)fractales, como ya se vio en los capítulos precedentes[48, 47, 100, 101, 102, 103, 104, 105]. Recordemos que, para el modelo a cascada multiplicativa, las leyes de escalado de los momentos estadísticos conducen a una correlación espacial que escala con el exponente del momento de segundo orden del campo de datos

$$\langle \epsilon_\lambda(x) \epsilon_\lambda(x + \tau) \rangle \propto \tau^{-K(2)} \quad (4.1)$$

donde  $\epsilon_\lambda(x)$  es el ruido residual en el sector representado por la variable  $x$  a escala  $\lambda$  sectores por corona y  $K(2)$  es la función de escalado de momentos estadísticos para  $q = 2$ , es decir,  $K(q)|_{q=2}$ . Además, una PSD que escala según la ley  $P(k) \sim k^{-B}$  nos conduce a una correlación espacial de la forma

$$\langle \epsilon_\lambda(x) \epsilon_\lambda(x + \tau) \rangle \propto \tau^{B-1} \quad (4.2)$$

de donde deducimos de manera inmediata que el exponente  $B$  de escalado de la PSD se relaciona con el exponente del momento estadístico de segundo orden  $K(2)$  mediante

$$B = 1 - K(2) \quad (4.3)$$

En nuestro caso, vamos a ver que  $K(2)$  tiene un valor muy pequeño, por lo que la PSD es prácticamente la correspondiente a un ruido  $1/f$  estricto[109, 96],

es decir,  $B \simeq 1$ . Naturalmente, todo lo anterior es válido cuando el ruido a analizar es estacionario WSS y además el momento estadístico de segundo orden (4.2) presenta propiedades de escalado. Si, además de todo ello, el campo de datos  $\epsilon_\lambda(x)$  tiene propiedades de escalado en todos sus momentos de orden  $q$ , no siendo este exclusivamente entero,

$$\langle \epsilon_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K(q)} \quad (4.4)$$

nos encontramos ante un comportamiento (multi)fractal si  $K(q)$  es (no)lineal con el orden del momento  $q$ . Cuando la función de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$  se puede parametrizar con ayuda de unos pocos parámetros, se tiene un carácter de universalidad en el escalado que vendrá medido por el índice de Levy  $\alpha$ , la codimensión media  $C_1$  y, eventualmente, el exponente de no estacionaridad  $H$ , cuando estemos en presencia de señales no estacionarias (o no conservativas en el lenguaje del modelo a cascada multiplicativa)

## 4.1 Función de escalado de los momentos estadísticos

Una vez filtrados los sucesos, queda el ruido residual  $\epsilon_\lambda(x)$  cuyas propiedades de escalado queremos precisar. Ya se vio que la ley de escala satisfecha por la PSD no basta para asegurar el escalado de los restantes momentos. Por ello es necesario ir construyendo paso a paso la función  $K(q)$ . Para cada valor real de  $q$  vamos a construir el campo  $\epsilon_\lambda^q(x)$  para la resolución  $\lambda$  y calcularemos el valor de  $K(q)$  como la pendiente del ajuste lineal de  $\log \langle \epsilon_\lambda^q \rangle$  frente a  $\log \lambda$

$$\log \langle \epsilon_\lambda^q \rangle \sim K(q) \log \lambda \quad (4.5)$$

Debemos tener muy presente el carácter estacionario de los datos pues, de no ser así, tendríamos una dependencia con el sector, es decir, con la variable  $x$ . La estacionaridad nos permite, además, calcular los promedios  $\langle . \rangle$  sobre la colectividad aprovechando todos los datos de modo que los promedios se estiman sobre los datos de cada suceso y sobre el conjunto de sucesos. Sin embargo, cuando no estamos seguros acerca de la estacionaridad de la señal, puede ser necesario filtrar (o *blanquear*) los datos para extraer de ellos la cantidad estacionaria apropiada.

Para que los datos representen una distribución de probabilidad se han normalizado a cada escala considerada. La normalización se lleva a cabo en media de la colectividad, es decir

$$\epsilon_\lambda \rightarrow \frac{\epsilon_\lambda}{\langle \epsilon_\lambda \rangle} \quad (4.6)$$

lo cual corresponde a la denominada *normalización canónica* en la que se permite que no exista conservación de la media espacial de una realización a otra sino que dicha conservación ha de entenderse extendida al conjunto de realizaciones disponibles.

Finalmente debemos hablar sobre la construcción de  $\epsilon_\lambda(x)$  que representa la señal a resolución  $\lambda$ . Nuestros datos de partida representan la densidad corregida de partículas en la corona a una resolución dada por el número de sectores  $\lambda = 2^8$ . Si queremos conocer esta densidad corregida a otra resolución, sería necesario volver sobre la señal inicial a la resolución deseada, es decir, con el número de sectores  $\lambda$  deseado, y realizar el filtrado de la componente cuya PSD es constante. Sin embargo, también se puede operar sobre la señal ya preparada a resolución máxima  $\epsilon_\lambda(x)$  y proceder a una operación de *degradación* (coarse-graining) de los datos. La manera más simple de hacer esto es tomar los promedios de la señal sobre grupos de sectores como la señal a escala mayor o degradada. Nótese que este procedimiento degrada en general las señales haciendo perder detalles significativos que sólo se ven a escalas más pequeñas. Sólo en el caso de ruidos que verifican leyes de escala, la degradación no es importante puesto que, por definición, la señal mantiene todas sus características esenciales independientemente de la escala utilizada para representarla. Sin embargo, aun en estas situaciones y sobre todo con señales que presentan leyes de escalado múltiple o multifractales, podemos tener pérdidas de detalles esenciales al degradar de esta manera. El procedimiento es demasiado grosero y hay que aplicar otras estrategias como, por ejemplo, la degradación por medio de wavelets, las cuales preservan las propiedades de escalado de las señales al pasar de unas escalas de medida a otras.

En los siguientes apartados vamos a estimar la función  $K(q)$  para la señal obtenida de las coronas lejana y cercana cuando los sucesos de la librería se clasifican por los dos métodos ya conocidos. Puesto que las PSD obtenidas en el capítulo anterior no son muy distintas en una y otra clasificación, es de esperar que no existan grandes diferencias en el comportamiento de escalado de la señal residual. Cualquier diferencia deberá ser explicada por la ya comentada presencia de grandes fluctuaciones en el nivel medio de la señal cuando se clasifican los sucesos por energía.

#### 4.1.1 Función $K(q)$ en el análisis lejano

Recordemos que en el capítulo anterior quedó establecido tras el filtrado de las bases de datos iniciales lo siguiente:

- La PSD del ruido residual se comporta aproximadamente como  $P_\epsilon(k) \sim A/k^B$  donde  $B \simeq 1$ .
- El ruido residual es estacionario, al menos WSS, lo cual viene avalado no sólo por el valor de  $B$  sino también por el resultado del test con las funciones de estructura que se ha realizado<sup>1</sup>.

Las figuras 4.1 y 4.2 representan la función de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$  (triángulos negros) para los sucesos clasificados por energías, mientras que en las figuras 4.3 y 4.4 se realiza dicha representación para la clasificación por número de partículas secundarias. En ambos casos, las gráficas han sido obtenidas a partir de  $\langle \epsilon_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K(q)}$  para el rango de escalas comprendido entre  $\lambda = 2^1$  y  $\lambda = 2^8$  sectores por corona y un rango de valores de  $q$  que va desde  $q_{min} = 0.1$  hasta  $q_{max} = 5$ . en saltos de tamaño  $\Delta q = 0.2$ . Hay que recordar que para cada valor de  $q$  se realiza un ajuste lineal de  $\log \langle \epsilon_\lambda^q \rangle$  frente a  $\log \lambda$  comprobándose en la operación que verdaderamente existe linealidad frente a ambas magnitudes y en consecuencia una ley de escala con la resolución  $\lambda$ . En ellas se representa también el ajuste a la función (1.90), mediante la línea punteada, para el rango de momentos representado, así como el ajuste a la misma función con los parámetros determinados por la técnica DTM (§4.2), por la línea de trazos. A la vista de estas figuras se deducen las siguientes afirmaciones:

- Las funciones de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$  presentan un carácter no lineal que indica un comportamiento de escalado complejo: no existe un único número que caracterize las propiedades de escala de la señal, sino toda una jerarquía de valores  $D_q = K(q)/q$ .
- La forma de  $K(q)$  sugiere que posiblemente puedan ser modelizables en el marco de la teoría de los Multifractales Universales donde dicha función puede ser escrita como una relación entre dos parámetros  $\alpha$  y  $C_1$  dada por (1.90) gracias a la concurrencia del modelo a cascada multiplicativa y de la estabilidad bajo adición de las distribuciones de probabilidad extremas de Levy.
- Aparentemente no se observan grandes diferencias según el tipo de clasificación de los datos con la excepción de que, como se verá mas adelante, la clasificación por  $N_s$  permite una modelización mucho mas precisa en términos de la aproximación multifractal universal.

---

<sup>1</sup>. Para señales estacionarias las funciones de estructura  $Str(\tau, q) = \langle (\epsilon_\lambda(x + \tau) - \epsilon_\lambda(x))^q \rangle$  no presenta una ley de escalado claro con la separación  $\tau$ .

## Análisis Lejano

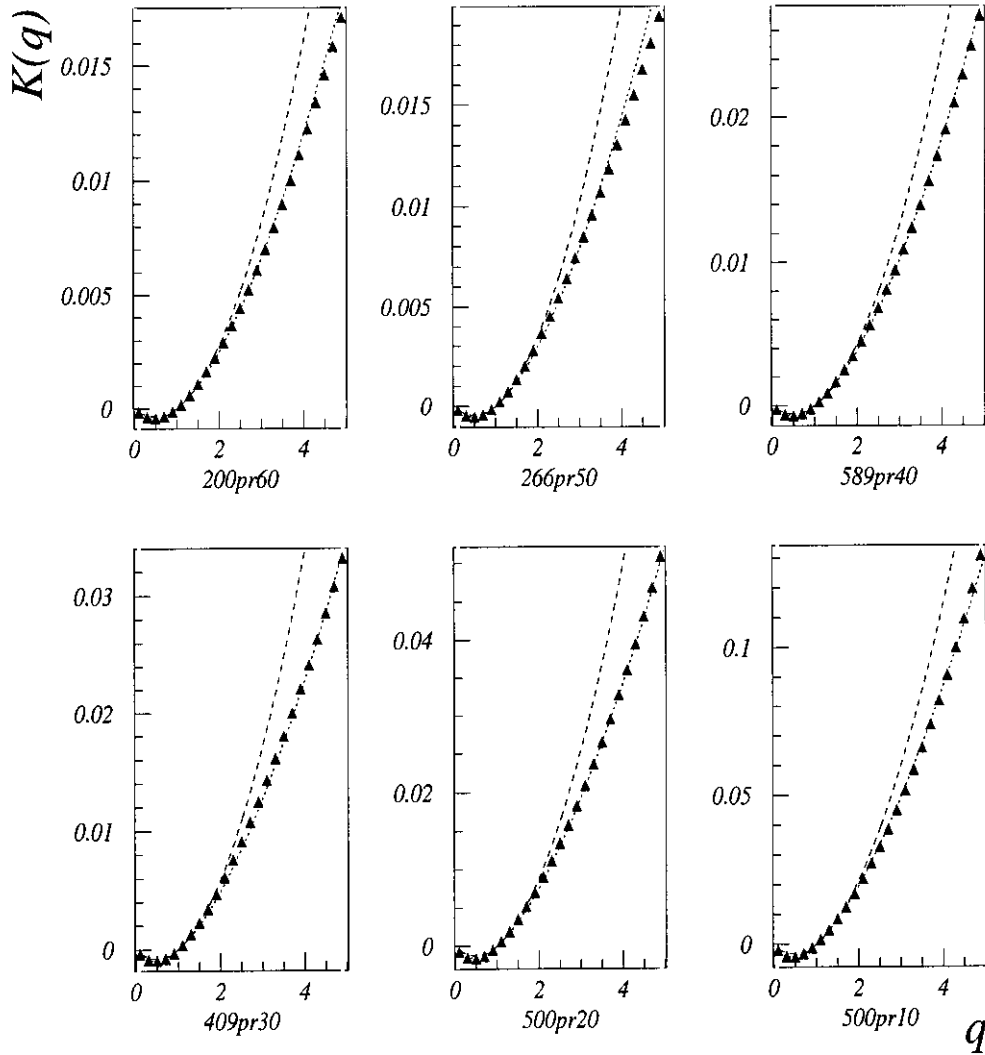


Figura 4.1: Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de protones clasificados por energía en el análisis lejano. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{\max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM (4.2).

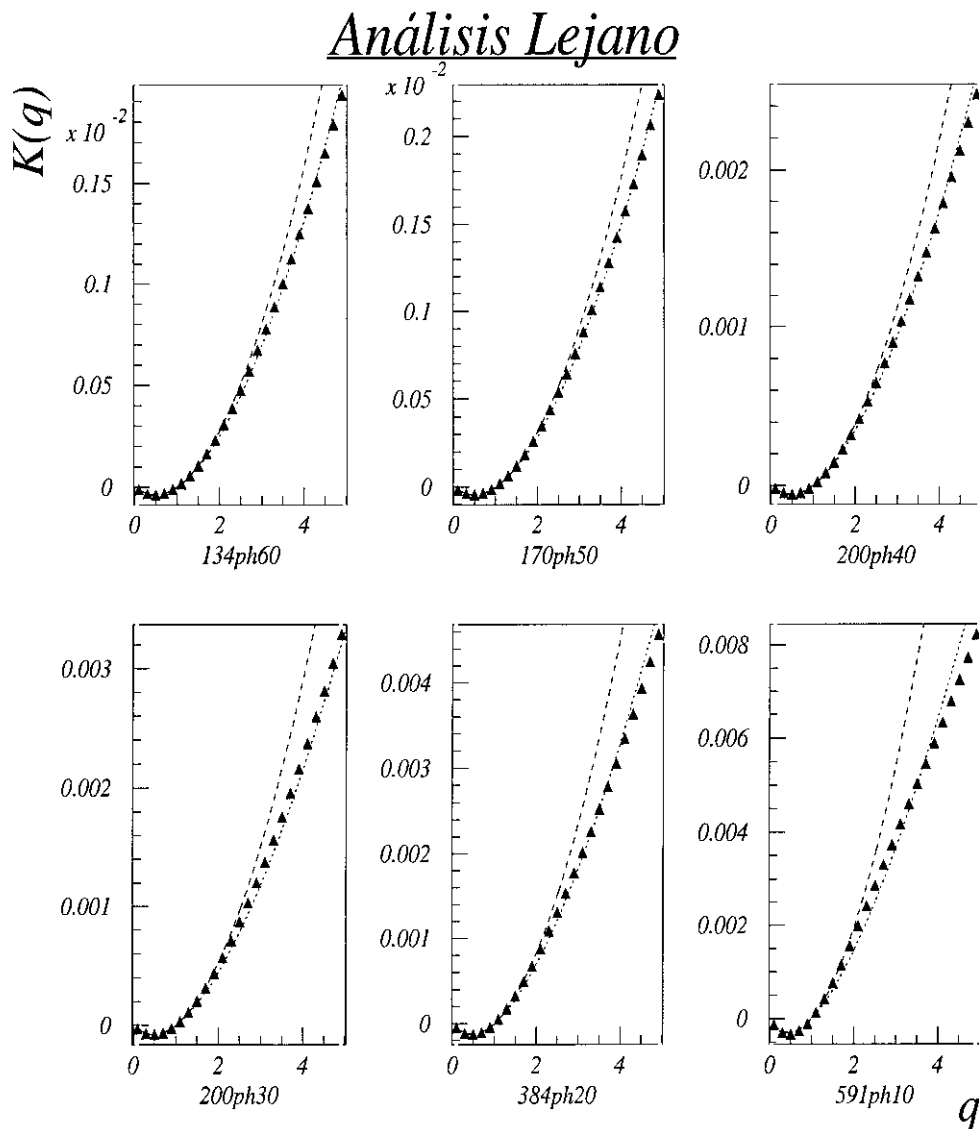


Figura 4.2: *Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de fotones clasificados por energía en el análisis lejano. Al igual que en la figura 4.1, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.*



## Análisis Lejano

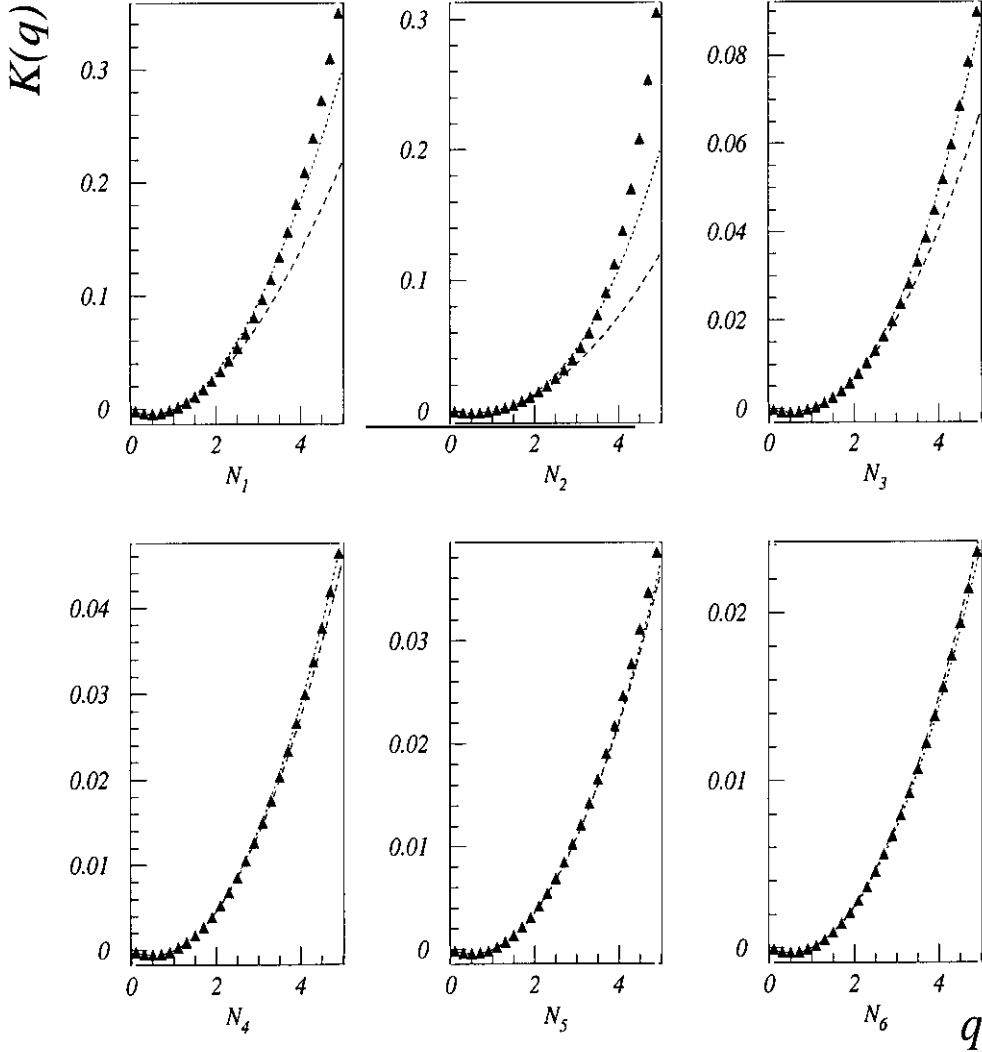


Figura 4.3: Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de **protones** agrupados por **número** de partículas secundarias recogidas en la **corona lejana**. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{\max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM (4.2).

### Análisis Lejano

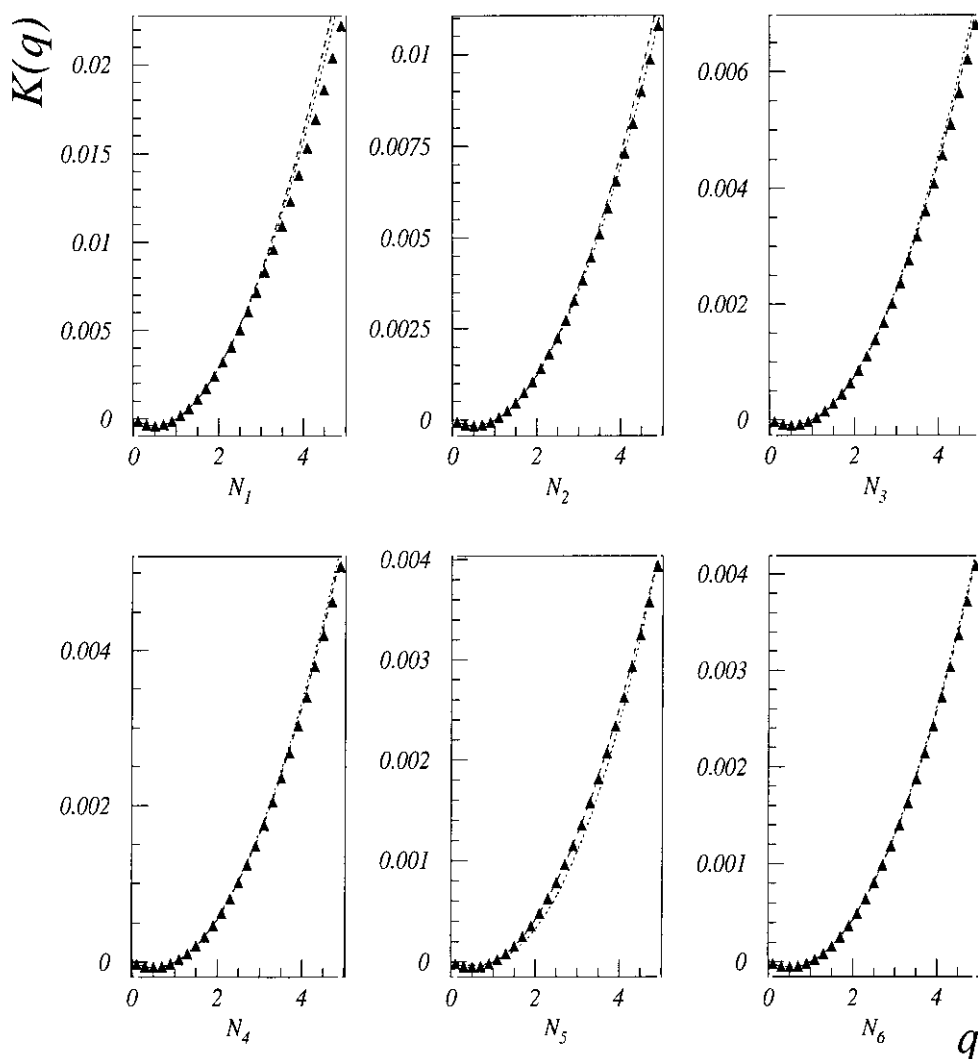


Figura 4.4: *Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de fotones agrupados por número de partículas secundarias recogidas en la corona lejano. Al igual que en la figura 4.1, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{\max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.*

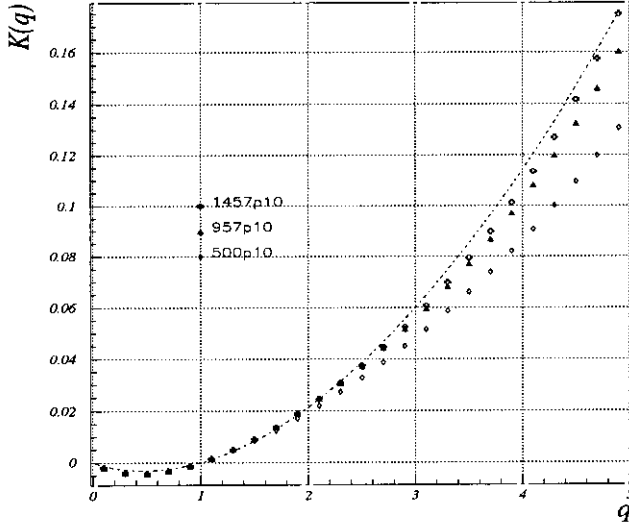


Figura 4.5: Dependencia de la función de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$  con el tamaño de la muestra para protones de 10 TeV.

métodos directos, de los parámetros asociados al modelo multifractal universal, que es el que se propone en este trabajo, mientras que la clasificación por  $N_s$  mejora algo esta estimación aunque para valores grandes de  $q$  en las muestras de bajo  $N_s$ , el escalamiento dado por (4.4) empeora dando lugar a valores de  $K(q)$  con grandes barras de error.

Un primer intento de ajustar directamente a la expresión (1.90) las gráficas 4.1 y 4.2 conduce a una estimación muy pobre de los parámetros  $\alpha$  y  $C_1$  debido fundamentalmente a dos causas que pasamos a discutir con algún detalle. La primera de ellas se refiere al reducido tamaño de las muestras de los sucesos. En estos casos, el espacio de probabilidad se muestrea de manera incompleta dejando fuera a los sucesos que presentan grandes valores de la densidad de partículas y que, por otra parte son muy importantes en el comportamiento de los momentos estadísticos<sup>2</sup>. Las figuras 4.5 y 4.6 representan la estimación de  $K(q)$  para las muestras de primarios indicadas

Aunque, para los dos tipos de clasificación de los sucesos, las funciones de escalado de momentos  $K(q)$  son similares bajo algún criterio de comparación, existen claras diferencias que van a ponerse de manifiesto al intentar buscar un modelo analítico que reproduzca lo más fielmente posible los valores empíricos encontrados. Vamos a ver que la clasificación por energías conduce a una determinación imprecisa, por

<sup>2</sup>No hay que olvidar que cada valor  $\epsilon_\lambda(x)$  en un modelo multiplicativo del proceso es el resultado de multiplicar 8 variables aleatorias provenientes de una distribución de probabilidad que posee largas colas hacia los valores extremos. Para estos procesos multiplicativos, los sucesos extremos (raros) dominan la estadística a altos momentos[106], por lo que si el número de realizaciones no es el suficiente, podemos encontrar grandes diferencias entre el valor más probable de  $\epsilon_\lambda^q$  y el valor de  $\langle \epsilon_\lambda^q \rangle$ .

cuando variamos el número de realizaciones. En ellas se aprecia que a medida que aumentamos el tamaño de las muestras la gráfica  $K(q)$  se *eleva* tanto más cuanto mayor sea  $q$ , reflejando la ausencia de valores extremos en el muestreo del espacio de probabilidad.

Como se puede apreciar, el tamaño de las muestras de sucesos representa un serio inconveniente a la determinación directa de la función de escalado de momentos tanto si se ajusta o no a la función (1.90). En el primer caso conduce a una *subestimación* de los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $C_1$  tanto más acusada cuanto mayor sea el rango de momentos con el que se realiza el ajuste a (1.90). En la tabla 4.1 se proporcionan los valores de estos parámetros cuando el ajuste se realiza tomando dos rangos de momentos,

el primero comprendido entre  $q_{min} = 0.1$  y  $q_{max} = 2$  y el segundo entre  $q_{min} = 0.1$  y  $q_{max} = 5$ . Se puede apreciar en ella la dependencia en la amplitud del rango de ajuste antes comentada. La explicación de esto hay que buscarla de nuevo en el muestreo del espacio de probabilidad subyacente al proceso<sup>3</sup>. Valores bajos de  $q$  para el momento realzan los valores pequeños, no extremales, más frecuentes y más probables, de los datos por lo que es razonable pensar que, aún para un número limitado de realizaciones, puedan reflejar con precisión razonable los valores asintóticos de los momentos

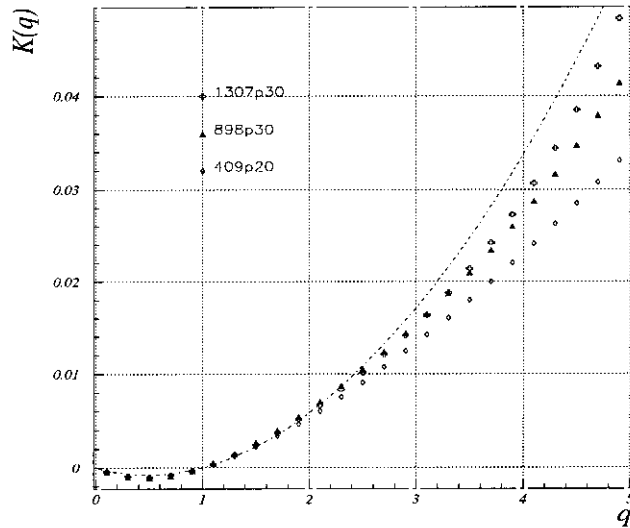


Figura 4.6: Dependencia de la función de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$  con el tamaño de la muestra para protones de 30 TeV.

<sup>3</sup>Según se apunta en la referencia [106], en situaciones reales (no simulaciones) es muy posible que se precisen menos realizaciones de las necesarias en situaciones simuladas por Monte Carlo para alcanzar el valor asintótico de los momentos. La razón de ello se encuentra en que la realidad nos proporciona datos *vestidos*, los cuales pueden ser mucho mas intermitentes que los datos simulados y por tanto reflejar de un modo mas completo cómo es el espacio de probabilidad subyacente.

verdaderos. La tabla 4.1 muestra diferencias relativas que pueden llegar en torno al 20% para los dos rangos de momentos considerados.

Database	$\alpha$ ( $q_{max} = 2$ )	$10^3 C_1$	$\alpha$ ( $q_{max} = 5$ )	$10^3 C_1$
200p60	1.7(7)	1.5(4)	1.5(5)	1.4(9)
266p50	1.7(3)	1.9(4)	1.5(2)	1.8(2)
589p40	1.6(3)	2.4(4)	1.5(2)	2.3(3)
409p30	1.6(3)	4.0(7)	1.7(2)	4.0(5)
500p20	1.49(5)	5.1(2)	1.34(3)	4.86(8)
500p10	1.30(5)	13.0(5)	1.28(3)	12.8(2)
134 $\gamma$ 60	1.9(5)	0.1(4)	1.7(7)	0.1(1)
170 $\gamma$ 50	1.8(7)	0.2(4)	1.7(5)	0.2(1)
200 $\gamma$ 40	1.8(8)	0.2(3)	1.6(5)	0.2(1)
200 $\gamma$ 30	1.7(6)	0.3(4)	1.6(7)	0.3(2)
384 $\gamma$ 20	1.7(5)	0.5(4)	1.5(6)	0.4(2)
591 $\gamma$ 10	1.6(6)	1.1(3)	1.3(3)	1.0(1)

Tabla 4.1: *Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal  $\alpha$  y  $C_1$  para análisis lejano, por ajuste a la función  $K(q)$  dada por (1.90). Se indican los rangos de momentos considerados para realizar los ajustes: (a) para  $q_{min} = 0.1$  a  $q_{max} = 2.0$  y (b) para  $q_{min} = 0.1$  a  $q_{max} = 5.0$ .*

La segunda causa que hace fracasar un buen ajuste de los valores empíricos de  $K(q)$  a la función dada por (1.90) a altos valores del momento es mucho mas seria, pues se refiere al comportamiento asintótico de la distribución de probabilidad asociada al problema. Si pretendemos que nuestros datos se ajusten a la función (1.90), debemos tener presente que el modelo probabilístico subyacente exige que la distribución de probabilidad posea *colas largas* asociadas a valores altos de los factores multiplicativos y con pequeña probabilidad. Dado que estamos en un modelo a cascada multiplicativa, esto propicia la aparición eventual de sucesos con valores muy altos para la medida que hacen crecer muy rapidamente los momentos estadísticos. Sin embargo, para nuestro problema real, esto significaría que, a medida que vamos aumentando la resolución, es decir, el número de sectores de la corona, deberíamos obtener valores progresivamente crecientes de la densidad, si el modelo es válido en su totalidad[107]. Por el contrario, las distribuciones reales no presentan, ni pueden presentar, esa tendencia. El número de partículas que llegan a un sector está limitado al total de partículas que pueden ser generadas en un suceso, el cual, a pesar de las grandes fluctuaciones que presenta debidas a la dispersión en la posición del máximo de la cascada, se mantiene acotado.

Respecto a los errores consignados en la tabla 4.1, estos son los que resultan del ajuste a la función (1.90) cuando cada punto empírico posee un intervalo de incertidumbre que se evalúa del modo que se describe a continuación. Puesto que el valor asignado para el momento de orden  $q$ ,  $\langle \epsilon_\lambda^q \rangle$ , es un promedio no sólo sobre la colectividad de realizaciones sino sobre cada realización concreta, se evalúa primeramente  $\langle \epsilon_\lambda^q(x) \rangle$  asociado al sector  $x$  y se calcula la dispersión al variar  $x$ . Si el número de realizaciones es suficientemente elevado esta dispersión es pequeña aún para altos momentos, correspondiéndose con la hipótesis de estacionaridad inicialmente supuesta. Sin embargo, para un muestreo algo pobre como es nuestro caso, sólo pa-

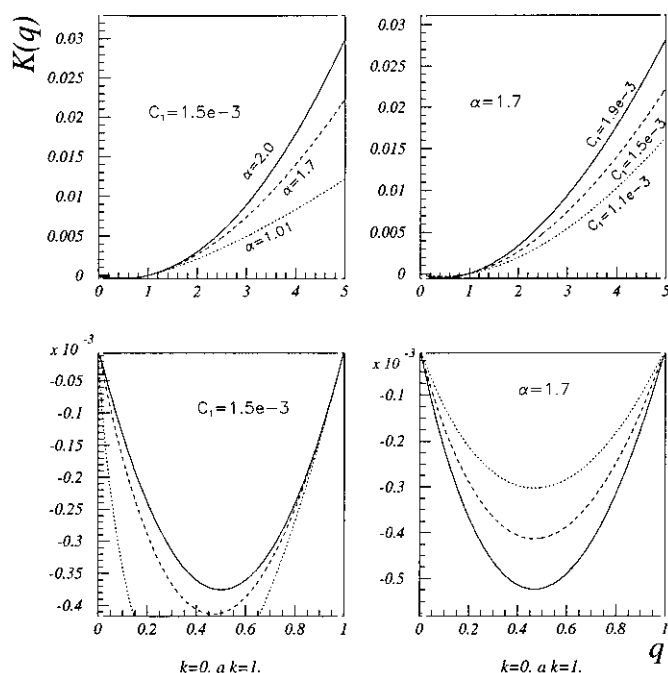


Figura 4.7: Comportamiento de la función de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$  para pequeñas variaciones de los parámetros  $\alpha$  y  $C_1$  en las muestras de protones de 60 TeV.

ra valores pequeños de  $q$  se encontrarán dispersiones pequeñas aumentando estas conforme aumenta el orden del momento. Esto es lo que se observa en la práctica produciendo una indeterminación grande tanto en  $\alpha$  como en  $C_1$ . Los errores calculados representan además estimaciones *mínimas* de la incertidumbre ya que, desde el principio, la señal se ha visto sometida a di-

versas transformaciones cuyos errores no se han considerado. Nos referimos a la operación de filtrado del ruido blanco la cual conlleva necesariamente la introducción de incertidumbres en la FFT, la estimación de la PSD por ajuste a (3.13) y finalmente la convolución con la función de transferencia (3.14). Estos errores contribuyen a incrementar la ya considerable incertidumbre descrita mas arriba. Se debe señalar también la gran sensibilidad de  $K(q)$  respecto de las variaciones en los parámetros  $\alpha$  y  $C_1$ .

La figura 4.7 representa la función  $K(q)$  para la base de datos 200p60 de la tabla 4.1 cuando se representan los valores extremos de los parámetros. En ella se aprecia la gran diferencia entre las curvas tanto para valores bajos como para los valores altos del orden del momento  $q$ . La determinación más precisa de estos parámetros se va a hacer por el estudio de las propiedades de escalado de los DTM, método que evita en parte los problemas derivados de la escasez de datos al operar sobre la zona apropiada donde los valores de los parámetros de escalado son los correspondientes al comportamiento asintótico.

Con respecto a la aplicación de (1.90) a los sucesos clasificados por el número de partículas secundarias, la tabla 4.2 recoge la estimación directa de  $\alpha$  y  $C_1$  para los dos rangos de momentos ya contemplados con anterior-

Database	Tipo	$\alpha$ ( $q_{max} = 2$ )	$10^3 C_1$	$\alpha$ ( $q_{max} = 5$ )	$10^3 C_1$
$N_1$	p	1.63(4)	16.0(4)	1.88(2)	16.9(3)
$N_2$		2.0(2)	6.1(4)	2.6(6)	5.3(3)
$N_3$		2.0(3)	3.4(4)	2.4(5)	2.9(3)
$N_4$		2.0(2)	2.2(2)	2.1(3)	2.2(6)
$N_5$		2.0(2)	1.8(2)	2.1(3)	1.7(5)
$N_6$		2.0(6)	1.3(4)	2.0(1)	1.2(1)
$N_7$		2(1)	1.2(5)	2(1)	1.2(2)
$N_1$	$\gamma$	1.8(4)	1.6(4)	1.8(9)	1.5(9)
$N_2$		1.9(7)	0.6(4)	1.9(9)	0.6(9)
$N_3$		1.9(8)	0.4(3)	1.9(8)	0.4(9)
$N_4$		1.9(8)	0.3(4)	2(1)	0.3(9)
$N_5$		1.9(9)	0.2(3)	2(1)	0.1(7)
$N_6$		2(1)	0.2(4)	2(1)	0.2(9)
$N_7$		2(1)	0.2(3)	2(1)	0.1(9)

Tabla 4.2: Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal  $\alpha$  y  $C_1$  para análisis lejano para sucesos clasificados por  $N_s$ . Los rangos son los mismos que se tomaron en la tabla 4.1.

ridad. Los valores algo mas elevados del parámetro  $\alpha$  indican la ausencia de fluctuaciones violentas, sin duda debidas a la limitación impuesta por la

propia clasificación de los sucesos. Por otro lado, la similitud en los valores de  $C_1$  indican un parecido grado de inhomogeneidad en ambos tipos de clasificación. Se destaca asimismo que en la mayor parte de las muestras el ajuste directo indica que el modelo (1.90) resulta apropiado para parametrizar las gráficas empíricas obtenidas.

#### 4.1.2 Función $K(q)$ en el análisis cercano

Según vimos en el capítulo anterior, el ruido residual obtenido de las coronas cercanas, una vez realizado el filtrado de la componente *blanca*, se caracterizaba por una PSD con una ley de potencias  $P_e(k) \sim A/k^B$  donde  $B \approx 1.3 - 1.5$  para los protones. Además, el análisis de las funciones de estructura para estos primarios revela que  $H \approx 0.21 - 0.27$  (tablas 3.6 y 3.9) con lo que siguiendo a Lavalle[49] procederemos a realizar un nuevo filtrado de los datos correspondientes a protones con ayuda de un filtro definido por

Database	$\alpha$ ( $q_{max} = 2$ )	$10^3 C_1$	$\alpha$ ( $q_{max} = 5$ )	$10^3 C_1$
200p60	1.5(1)	3.5(3)	1.37(7)	3.3(1)
266p50	1.43(9)	3.6(2)	1.21(4)	3.03(8)
589p40	1.4(1)	5.7(5)	1.19(6)	5.1(2)
409p30	1.3(1)	8.8(8)	1.19(6)	8.3(4)
500p20	1.10(6)	11.8(5)	1.15(4)	12.1(4)
500p10	1.17(4)	29.8(9)	1.13(2)	28.7(4)
134 $\gamma$ 60	1.7(7)	0.2(3)	1.5(5)	0.2(1)
170 $\gamma$ 50	1.7(5)	0.3(4)	1.6(7)	0.3(2)
200 $\gamma$ 40	1.7(6)	0.3(3)	1.4(6)	0.3(2)
200 $\gamma$ 30	1.6(6)	0.5(3)	1.4(7)	0.4(2)
384 $\gamma$ 20	1.5(6)	0.9(4)	1.2(5)	0.7(2)
591 $\gamma$ 10	1.4(2)	2.0(2)	1.1(6)	1.6(1)

Tabla 4.3: *Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal  $\alpha$  y  $C_1$  para los datos clasificados por energía en análisis cercano, mediante ajuste a la función  $K(q)$  dada por (1.90). Los rangos de  $q$  utilizados para el ajuste son los mismos que en la tabla (4.1).*

la función de transferencia real

$$h(k) = k^H \quad (4.7)$$

Si no se realizase este filtrado no podríamos emplear el procedimiento de la subsección anterior para encontrar  $K(q)$ , pues, para las señales no estacionarias, los valores medios  $\langle \epsilon_\lambda^q(x) \rangle$  dependen también del sector  $x$  y no es posible conseguir ajustar linealmente  $\log \langle \epsilon_\lambda^q \rangle$  frente a  $\log \lambda$ .



Sólo tras el filtrado se obtiene una señal que satisface los requisitos previos de estacionaridad y a la que puede aplicarse el metodo de obtención de la función de escalado de momentos estadísticos  $K(q)$ . Las figuras 4.8 y 4.9 muestran estas funciones para las bases de datos clasificadas por energía en análisis cercano, mientras que la tabla 4.3 recoge los parámetros del modelo Multifractal Universal  $\alpha$  y  $C_1$  obtenidos por ajuste directo a la función (1.90). Estos parámetros, junto a  $H$  para los protones, constituyen la caracterización completa del ruido residual en el análisis cercano para este tipo de clasificación de los datos.

Database	Tipo ( $q_{max} = 2$ )	$\alpha$	$10^3 C_1$ ( $q_{max} = 5$ )	$\alpha$	$10^3 C_1$
$N_1$	p	1.33(5)	45(2)	1.55(2)	50.9(8)
$N_2$	p	1.93(4)	22.9(5)	2.17(2)	23.3(4)
$N_3$	p	2.03(4)	14.8(3)	2.25(2)	14.8(3)
$N_4$	p	2.0(1)	9.2(5)	2.21(5)	8.4(4)
$N_5$	p	2.0(2)	7.6(6)	2.29(9)	6.8(5)
$N_6$	p	2.0(2)	6.1(6)	2.2(1)	5.7(5)
$N_7$	p	2.0(3)	5.6(5)	2.2(1)	5.4(2)
$N_1$	$\gamma$	1.8(3)	3.1(3)	1.8(9)	3.1(2)
$N_2$	$\gamma$	1.9(6)	1.5(5)	1.9(9)	1.5(9)
$N_3$	$\gamma$	1.9(5)	0.9(2)	1.9(8)	0.9(7)
$N_4$	$\gamma$	1.9(4)	0.6(1)	2(1)	0.6(4)
$N_5$	$\gamma$	1.9(9)	0.5(5)	2(1)	0.5(8)
$N_6$	$\gamma$	2(1)	0.4(2)	2(1)	0.4(7)
$N_7$	$\gamma$	2(1)	0.3(3)	2(1)	0.2(5)

Tabla 4.4: Estimación directa de los parámetros del modelo Multifractal Universal  $\alpha$  y  $C_1$  para los datos clasificados por  $N_s$  en análisis cercano, mediante ajuste a la función  $K(q)$  dada por (1.90). Los rangos de  $q$  utilizados para el ajuste son los mismos que en la tabla (4.1).

Cuando los datos se clasifican por  $N_s$ , se obtienen las figuras 4.10 y 4.11, en las cuales se representa, al igual que se hizo con la clasificación por energía, la función  $K(q)$  obtenida directamente a partir de los datos (triángulos negros), la función (1.90) para los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $C_1$  obtenidos por ajuste directo hasta  $q_{max} = 5$  y la misma función anterior para los valores de estos parámetros hallados mediante la técnica DTM que ofrece resultados mucho mejores que el ajuste directo. La tabla 4.4 refleja los valores de  $\alpha$  y  $C_1$  del ajuste directo a (1.90) de la curva empírica para los dos rangos del orden del momento  $q$ . En ella se vuelve a poner de manifiesto la dificultad que entraña tal modo de determinar esos parámetros, debida al carácter no lineal de (1.90), justificando el empleo de técnicas indirectas como la que se

va a tratar a continuación.

## 4.2 Estimación de $\alpha$ y $C_1$ por la técnica DTM

La técnica DTM (Double Trace Moments) permite una determinación más precisa de los parámetros del modelo Multifractal Universal. Aunque la formulación inicial de la técnica se basa en la estimación de los  $\eta$ -flujos[49] y el estudio de las propiedades de escalado de sus momentos, aquí utilizaremos otro método equivalente que consideramos computacionalmente más sencillo. Se trata de construir el  $\eta$ -campo de datos definido por

$$E_\lambda(\eta) = \frac{\epsilon_\lambda^\eta}{\langle \epsilon_\lambda^\eta \rangle} \quad (4.8)$$

Los momentos de estos nuevos datos son

---


$$\langle E_\lambda(\eta)^q \rangle = \frac{\langle \epsilon_\lambda^{q\eta} \rangle}{\langle \epsilon_\lambda^\eta \rangle^q} \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta que  $\langle E_\lambda(\eta)^q \rangle \sim \lambda^{K(q,\eta)}$  y que por construcción se verifica

$$K(q, \eta) = K(q\eta) - qK(\eta) \quad (4.10)$$

entonces, la forma funcional (1.90) aplicada en la ecuación anterior conduce a (1.94)

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q, 1)$$

lo cual permite la estimación directa de  $\alpha$  siempre que se verifique la desigualdad (1.96)

$$\max(\eta, q\eta) < \min(q_D, q_s)$$

ecuación que nos proporciona unos rangos en los valores de  $q$  y  $\eta$  para la correcta estimación de  $\alpha$ . Recordemos que  $q_s$  es el máximo orden del momento que podemos calcular de manera precisa con una muestra de  $N_p$  sucesos y viene dado en el esquema de universalidad por (1.93) mientras que  $q_D$  es la solución de  $K(q_D) = q_D - 1$  indicándonos el máximo orden del momento que puede ser estimado teniendo en cuenta la divergencia estadística discutida en §1.5 mediante el procedimiento de degradación visto en §4.1. El pequeño valor encontrado para el parámetro  $C_1$  nos proporciona unos rangos de valores de  $q_s$  y  $q_D$  bastante amplios. Sin embargo esto sólo tiene sentido cuando el

## Análisis Cercano

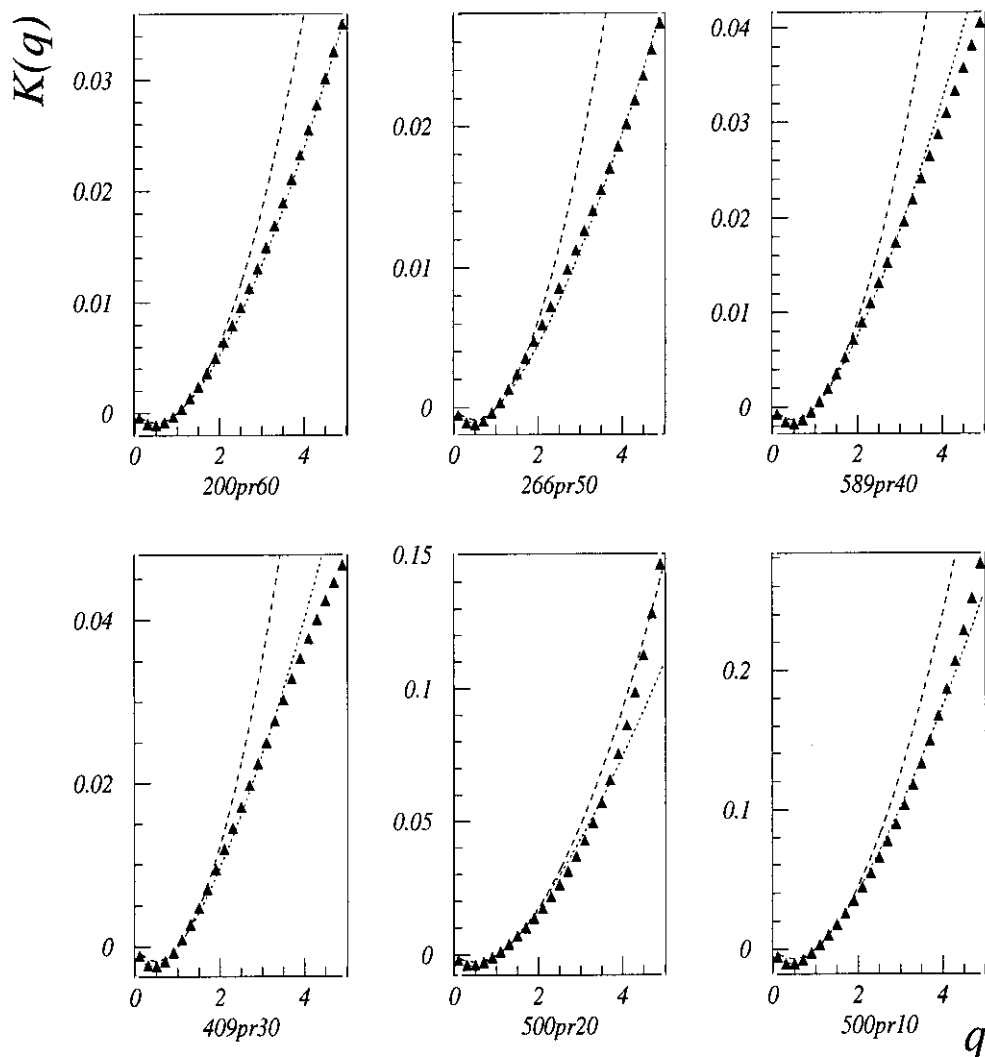


Figura 4.8: Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de **protones** clasificados por **energía** en el análisis **cercano**. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.

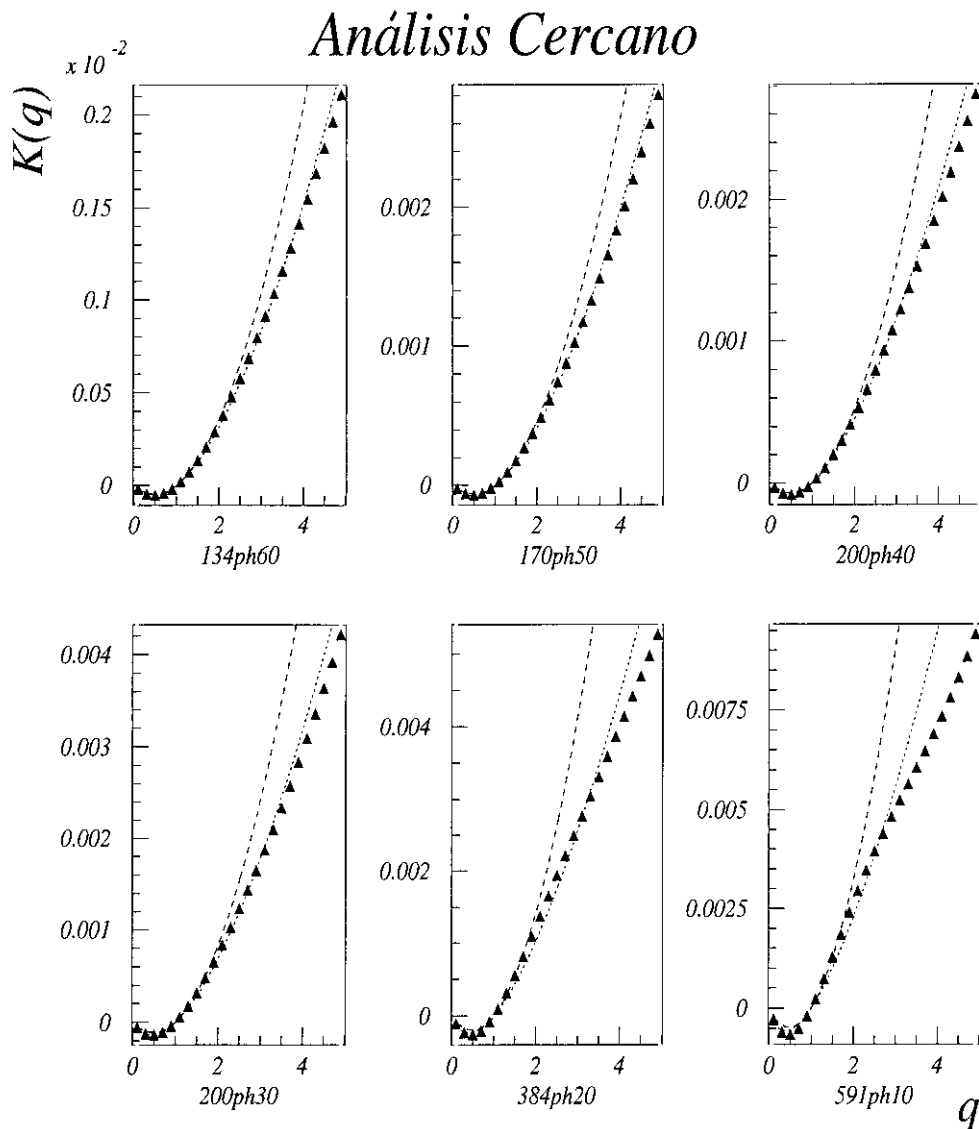


Figura 4.9: *Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de fotones clasificados por energía en el análisis cercano. Al igual que en la figura 4.8, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.*

### Análisis Cercano

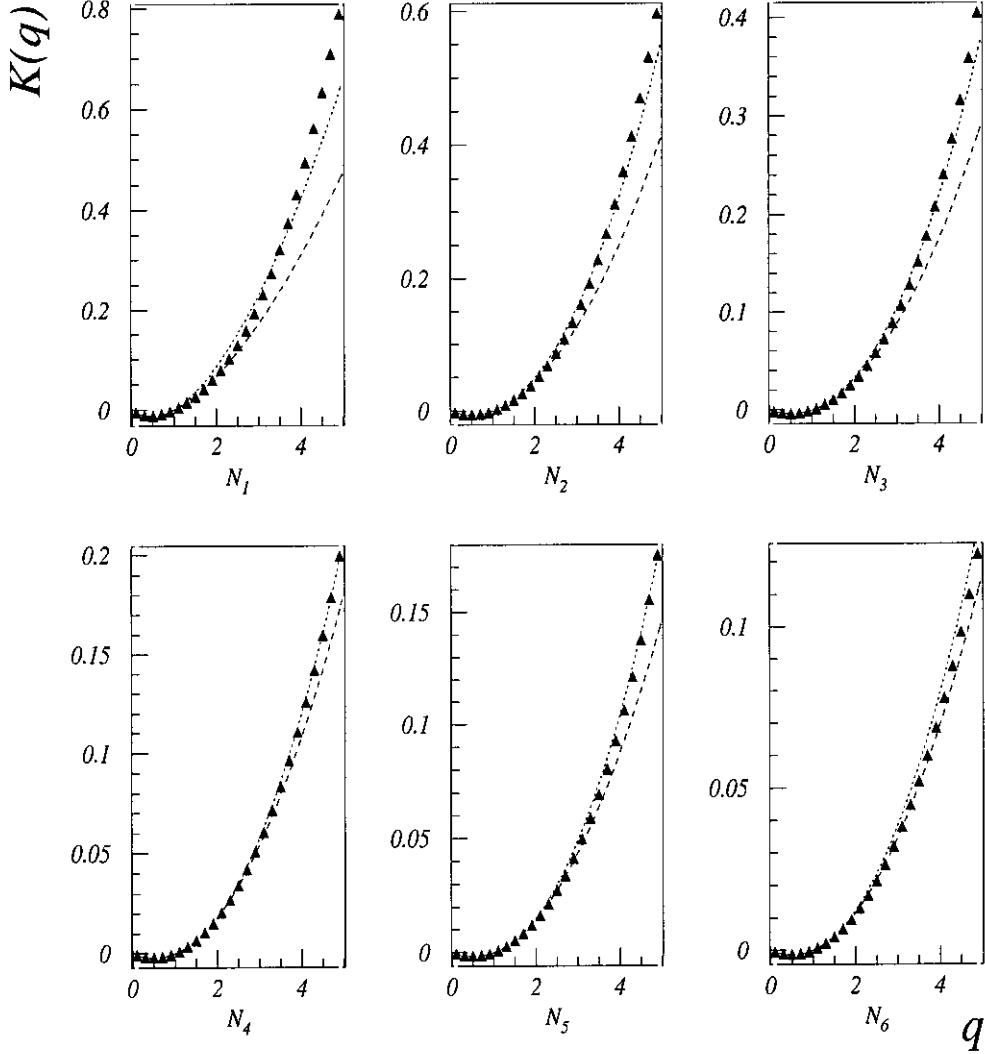


Figura 4.10: *Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de protones clasificados por el número de partículas secundarias que se recogen en la corona cercana. En trazo punteado se representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{\max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.*

### Análisis Cercano

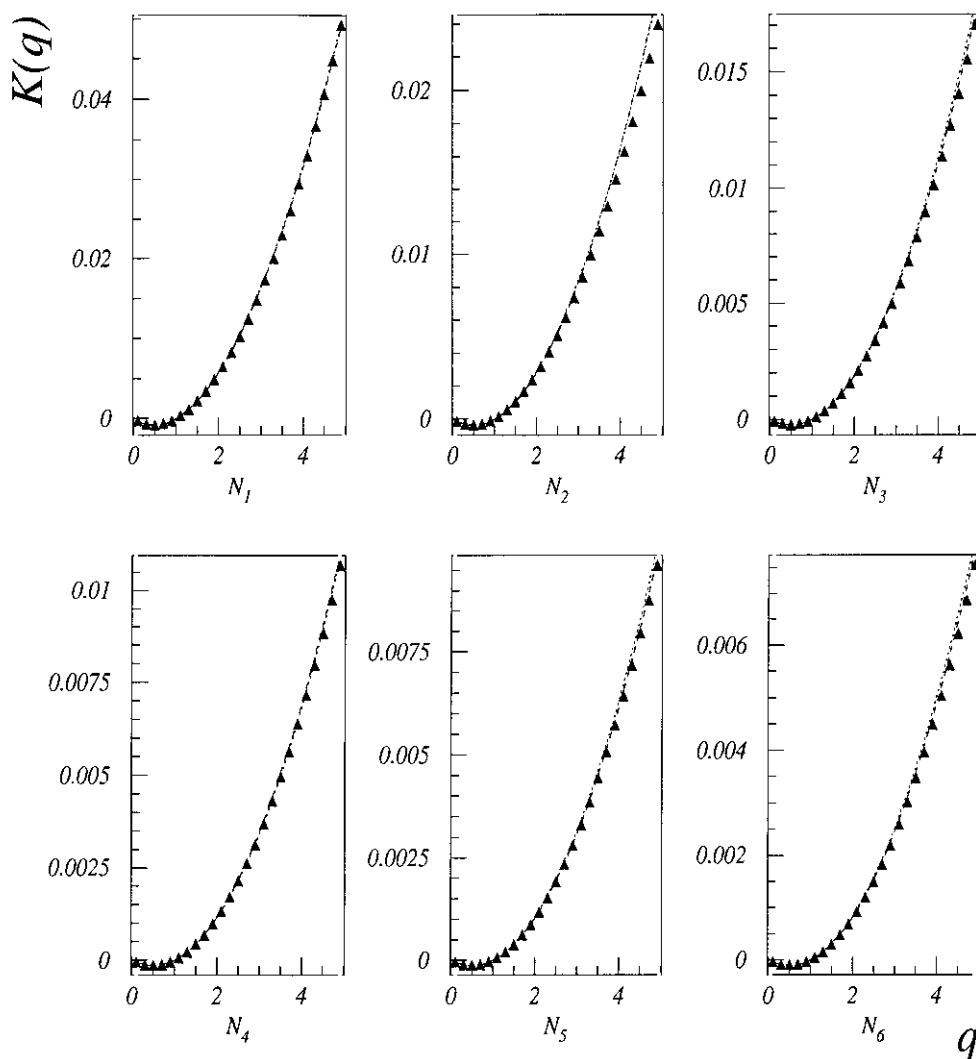


Figura 4.11: *Función de escalado de los momentos estadísticos para las muestras de fotones clasificados por el número de partículas secundarias que se recogen en la corona cercana. Al igual que en la figura 4.10, el trazo punteado representa la función (1.90) que mejor ajusta directamente a los datos para  $q_{max} = 5$ , mientras que la línea de trazos representa a dicha función empleando la técnica DTM.*

Analisis	Database	$\log \eta$	$\alpha$	$10^3 C_1$	H
Lejano	200p60	-2.7/-1.0	1.930(4)	1.42(2)	0.0
	266p50		1.918(2)	1.79(3)	0.0
	589p40		1.906(5)	2.21(3)	0.0
	409p30		1.902(3)	3.05(6)	0.0
	500p20		1.852(7)	4.7(1)	0.0
	500p10		1.741(8)	11.8(2)	0.0
Lejano	134 $\gamma$ 60	-1.8/0.0	1.905(7)	0.1422(7)	0.0
	170 $\gamma$ 50		1.894(3)	0.1616(9)	0.0
	200 $\gamma$ 40		1.870(8)	0.202(1)	0.0
	200 $\gamma$ 30		1.823(6)	0.282(3)	0.0
	384 $\gamma$ 20		1.80(1)	0.449(5)	0.0
	591 $\gamma$ 10		1.73(1)	1.07(2)	0.0
Cercano	200p60	-2.7/-1.5	1.895(3)	3.28(7)	0.25(4)
	266p50		1.887(3)	3.2(1)	0.23(2)
	589p40		1.840(5)	4.9(1)	0.24(2)
	409p30		1.803(6)	7.6(2)	0.24(4)
	500p20		1.721(9)	9.7(3)	0.25(4)
	500p10		1.75(1)	24.6(7)	0.27(4)
Cercano	134 $\gamma$ 60	-2.5/-0.5	1.923(8)	0.182(2)	0.0
	170 $\gamma$ 50		1.908(6)	0.239(3)	0.0
	200 $\gamma$ 40		1.913(8)	0.269(5)	0.0
	200 $\gamma$ 30		1.900(8)	0.430(9)	0.0
	384 $\gamma$ 20		1.884(9)	0.75(2)	0.0
	591 $\gamma$ 10		1.757(6)	1.76(6)	0.0

Tabla 4.5: Estimación de los parámetros del modelo Multifractal Universal,  $\alpha$  y  $C_1$ , mediante la técnica de los DTM.

espacio de probabilidad está lo bastante bien muestreado como para disponer de valores asintóticos de los momentos hasta el orden considerado.

Representando el  $\log K(q, \eta)$  frente a  $\log \eta$  para los diferentes valores de  $q$  utilizados en el cálculo se obtienen puntos alineados cuya pendiente representa en valor de  $\alpha$ . Ya que dicho valor debe ser independiente de  $q$ , la dispersión en  $\alpha$  hallada para los diferentes valores de  $q$  sirve para la estimación del error en su determinación. Para este trabajo, teniendo presente el efecto ya discutido del bajo número de realizaciones, se ha considerado un rango de valores de  $q$  entre  $q = 1.1$  y  $q = 2.0$  en pasos  $\Delta q = 0.1$  así como un rango de valores de  $\log \eta$  comprendido entre  $\log \eta = -2.7$  y  $\log \eta = 0$ , donde la linealidad de  $\log K(q, \eta)$  frente a  $\log \eta$  es más patente. A propósito de esto diremos que el efecto del tamaño de las muestras se refleja en que, a medida que se aumenta bien el valor del rango en  $\eta$  o de  $q$ , la linealidad se pierde obteniéndose valores locales de la pendiente progresivamente decrecientes. La zona óptima de ajuste en la que la relación (1.94) es válida se consigna en la

tabla de resultados. En cuanto al parámetro  $C_1$ , se estima a partir de (1.95) teniendo en cuenta que  $K(q, 1) = k(q)$  es la intersección de  $K(q, \eta)$  con la recta  $\eta = 1$ . Para cada valor de  $q$  se estima el correspondiente  $C_1$ , siendo su dispersión para los distintos  $q$  una medida de su error.

Análisis	Database	Tipo	$\log \eta$	$\alpha$	$10^3 C_1$	H
Lejano	$N_1$	p	-2.0/0.5	1.629(2)	15.7(1)	0.0
	$N_2$			1.997(2)	6.04(3)	0.0
	$N_3$			2.012(3)	3.33(1)	0.0
	$N_4$			2.011(2)	2.256(3)	0.0
	$N_5$			2.011(2)	1.813(3)	0.0
	$N_6$			2.005(5)	1.243(1)	0.0
	$N_7$			2.005(8)	1.162(1)	0.0
Lejano	$N_1$	$\gamma$	-2.0/0.5	1.870(4)	1.506(6)	0.0
	$N_2$			1.969(3)	0.622(1)	0.0
	$N_3$			1.982(4)	0.3750(4)	0.0
	$N_4$			2.003(2)	0.2731(2)	0.0
	$N_5$			2.008(4)	0.2102(1)	0.0
	$N_6$			1.995(4)	0.2176(1)	0.0
	$N_7$			1.995(8)	0.1434(1)	0.0
Cercano	$N_1$	p	-2.0/0.5	1.435(4)	40.7(3)	0.21(7)
	$N_2$			1.917(1)	22.5(1)	0.22(7)
	$N_3$			1.981(2)	14.87(6)	0.26(7)
	$N_4$			1.999(1)	9.04(2)	0.26(7)
	$N_5$			2.011(1)	7.25(2)	0.25(5)
	$N_6$			2.011(1)	5.73(1)	0.25(7)
	$N_7$			2.019(2)	5.47(2)	0.26(7)
Cercano	$N_1$	$\gamma$	-2.0/0.5	1.827(2)	3.0386(3)	0.0
	$N_2$			1.970(2)	1.4139(3)	0.0
	$N_3$			1.986(1)	0.9287(6)	0.0
	$N_4$			1.989(1)	0.5832(3)	0.0
	$N_5$			1.992(2)	0.5197(1)	0.0
	$N_6$			2.004(2)	0.4081(2)	0.0
	$N_7$			1.993(3)	0.2917(2)	0.0

Tabla 4.6: *Estimación de los parámetros del modelo Multifractal Universal,  $\alpha$  y  $C_1$ , mediante la técnica de los DTM para la clasificación de los sucesos por el número de partículas secundarias recogidas en las coronas.*

Las tablas 4.5 y 4.6 muestran los valores de  $\alpha$ ,  $C_1$  y  $H$  junto a sus errores estimados por los métodos descritos más arriba, para los dos tipos de clasificación de los datos considerados en este trabajo. Se consigna también el rango de  $\eta$  donde se encuentra la linealidad que garantiza el cumplimiento de (1.94).

Los valores encontrados, permiten clasificar los ruidos  $1/f$  encontrados en la señal medida en las coronas como ruidos de tipo multifractal[108],



---

pudiendo ser además encuadrados en el modelo Multifractal Universal. La proximidad de  $\alpha$  al valor límite  $\alpha = 2$  indica que el generador de este ruido es, según el modelo a cascada multiplicativa, cuasi gaussiano. Además, la extremada pequeñez de  $C_1$  indica una gran homogeneidad en los datos o equivalentemente, un comportamiento escasamente intermitente aunque no por ello carente, como se ha visto, de estructura compleja.



## Capítulo 5

### Método de separación $\gamma$ /protón

Aunque las cascadas tanto de protones como de fotones presentan una componente del ruido total del tipo  $1/f$ , las propiedades estadísticas de éste son diferentes para unos y otros, a pesar de la proximidad que los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $C_1$  y  $H$  del modelo Multifractal Universal presentan en ambos casos. Sin embargo, es fácil convencerse de que, por ejemplo, la relativamente pequeña diferencia en el valor de  $\alpha$  se traduce en la práctica en la abundancia de singularidades de mayor tamaño para los protones que para los fotones, lo que alejaría a aquellos, como ya se sabe, más que a éstos de las condiciones exigidas para satisfacer el modelo de la cascada media o de regresión a una constante. Respecto a  $C_1$ , en ambos casos se obtienen valores muy bajos de este parámetro, lo que genéricamente significa que la fluctuación de intensidad media se reparte de forma homogénea en la corona o, en el lenguaje fractal, el conjunto de sectores donde se alcanza el valor de la fluctuación media tiene una dimension fractal muy próxima a la dimensión topológica  $D_t = 1$ . Esta última afirmación también es equivalente a decir que existe una bajísima intermitencia en la señal, algo mayor en los protones, entendiendo por tal fenómeno la sucesión más o menos brusca de altos valores para la señal seguidos de otros de bajísima intensidad. De todo esto, no se desprende que sea posible encontrar algún procedimiento simple y eficaz que permita identificar la naturaleza de un suceso individual basándonos en la caracterización propuesta en los capítulos precedentes, ya que se trata de propiedades *estadísticas* que se refieren a valores medios sobre la colectividad de sucesos/realizaciones. En este capítulo, proponemos una técnica sencilla de identificación/separación  $\gamma$ /protón de las partículas primarias que originan las cascadas, que se basa en la medida de la bondad del modelo de regresión a una constante para la señal en las coronas. Aunque, según los resultados de los capítulos precedentes, este modelo no es apropiado para explicar las fluctuaciones correlacionadas que se encuentran, es también cier-

to que cualquier parámetro que intente medir cómo encajan los datos en el modelo, puede dar resultados distintos si se trata de protones o de fotones.

Finalmente, aunque en este trabajo se han propuesto dos maneras de clasificar los sucesos, los resultados hallados permiten adelantar que el método propuesto en este capítulo no parece ser sensible al tipo de clasificación efectuada[109]. Por este motivo, se utilizará la clasificación por energía para estimar cuantitativamente la capacidad de identificación/separación de la técnica que a continuación se detalla.

## 5.1 Parámetro $\chi_r^2$ y factor de calidad Q

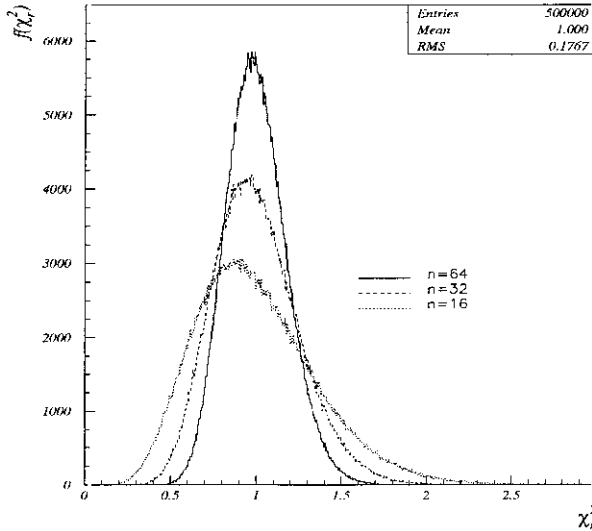


Figura 5.1: Distribución del estadístico  $\chi_r^2$  para  $n$  grados de libertad.

Comenzamos por elegir un parámetro que nos servirá de referencia en el proceso de identificación de cada suceso individual. Para este propósito, tomaremos el valor del parámetro  $\chi_r^2$  reducido<sup>1</sup> que se obtiene tras el ajuste individual de cada suceso a una constante. Este parámetro representa una medida de la bondad del ajuste de  $\epsilon_\lambda(x)$  a un nivel constante  $\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x$  representado por su valor medio sobre cada suceso individual y viene definido por

$$\chi_r^2 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{(\epsilon_\lambda(i) - \langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x)^2}{\sigma_i^2} \quad (5.1)$$

donde  $\sigma_i^2$  representa la varianza de la variable aleatoria asociada a cada sector  $i$  y  $\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x$  representa el valor medio de los datos sobre cada realización (media ergódica). En una situación idónea, es decir, cuando el modelo de regresión a una constante puede ser seriamente considerado, la

<sup>1</sup>El estadístico  $\chi_r^2$  se define como el valor de  $\chi^2$  por grado de libertad.

distribución de este parámetro puede tener una forma similar a la de la figura 5.1. Valores del estadístico muy superiores o inferiores a 1 indican falta de adecuación del modelo de regresión propuesto a los datos disponibles. No hay que perder de vista que en el test que se realiza se da por supuesto que no existe más correlación entre los datos que la proporcionada por el vínculo  $\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x = Cte$ ; lo que tiene como consecuencia que el número de grados de libertad reales sea  $\lambda - 1$ .

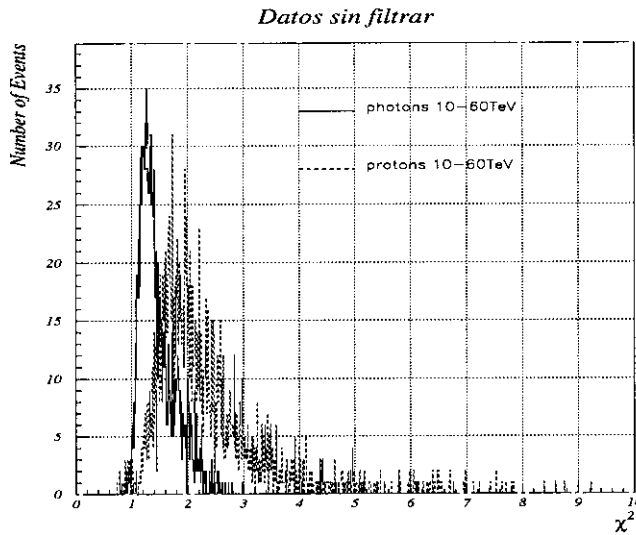


Figura 5.2: Distribución del estadístico  $\chi_r^2$  para las muestras de fotones y protones primarios sin haber filtrado la componente de ruido blanco.

Cuando no se posee información acerca de las varianzas  $\sigma_i^2$  asociadas a cada sector, es más conveniente utilizar otro estimador de la bondad de un ajuste que, con abuso de notación, también llamaremos  $\chi_r^2$ . Se trata del estadístico definido por

$$\chi_r^2 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{(\epsilon_\lambda(i) - \langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x)^2}{\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x} \quad (5.2)$$

en el que las varianzas se han sustituido por los valores medios. Suponiendo que  $\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x$  pueda considerarse constante de una realización a otra y que la varianza del proceso  $\sigma^2 = \langle (\epsilon_\lambda(i) - \langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x)^2 \rangle$  esté definida, es fácil

ver que el valor medio del estadístico (5.2) es<sup>2</sup>

$$\langle \chi_r^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x} \quad (5.3)$$

Cualquier correlación no modelizable mediante técnicas de regresión va a afectar muy sensiblemente a la distribución de valores del estadístico[109]. Este es precisamente nuestro caso ya que, como se ha visto en los capítulos precedentes,  $R(\tau) \sim \tau^\mu$ . Refiriéndonos al análisis lejano, podemos apreciar en la figura 5.2 las distribuciones de valores de  $\chi_r^2$  para fotones y protones cuando sobre los datos no se ha realizado operación alguna, es decir, conservan todas las componentes de ruido ya analizadas anteriormente. A la vista de las figuras, pueden apreciarse dos hechos significativos

- Las distribuciones se apartan de las esperadas en un modelo de regresión.
- Son muy diferentes según el rayo cósmico primario considerado.

Refiriéndonos a la figura 5.2, puesto que el parámetro  $\chi_r^2$  se obtiene para cada suceso individual, sería posible clasificar un suceso dando, además, una probabilidad de acierto, siempre que se tratara de un suceso encuadrable entre los de la librería usada en este trabajo. Más aún, si partimos de una muestra de sucesos entre los cuales hay representantes de los dos tipos, protones y fotones, y deseamos eliminar cuantos sucesos de tipo protón sea posible basándonos exclusivamente en el valor de  $\chi_r^2$ , podemos definir una magnitud que mida el enriquecimiento relativo en fotones de la muestra cuando seleccionamos o eliminamos sucesos según el valor del parámetro. Esta operación establece un *corte* de la muestra según  $\chi_r^2$ .

Dada una muestra de datos de dos tipos, tales como protones y rayos  $\gamma$ , el enriquecimiento de esta muestra en uno de los dos tipos mediante un método de separación se mide habitualmente por medio del denominado *factor de calidad*  $Q$  definido por

$$Q = \frac{\epsilon_\gamma}{\sqrt{\epsilon_p}} \quad (5.4)$$

donde  $\epsilon_\gamma$  y  $\epsilon_p$  son la fracciones de cada especie que resultan tras la aplicación del método separador[77]. La figura 5.3 nos muestra el factor de calidad  $Q$  correspondiente a los sucesos representados en la figura 5.2. Puede apreciarse que, para valores del parámetro de corte  $\chi_r^2 \approx 1.4$ , se obtiene<sup>3</sup>  $Q \approx 2.0$ .

<sup>2</sup>Un cálculo similar aplicado a (5.1) conduce a que  $\langle \chi_r^2 \rangle = 1$ .

<sup>3</sup>Además, como se verá más adelante, la variación de  $Q$  con la resolución es muy pequeña, incidiendo solamente sobre el valor del corte. Este hecho representa una prueba indirecta de las leyes de escala satisfechas por los datos.

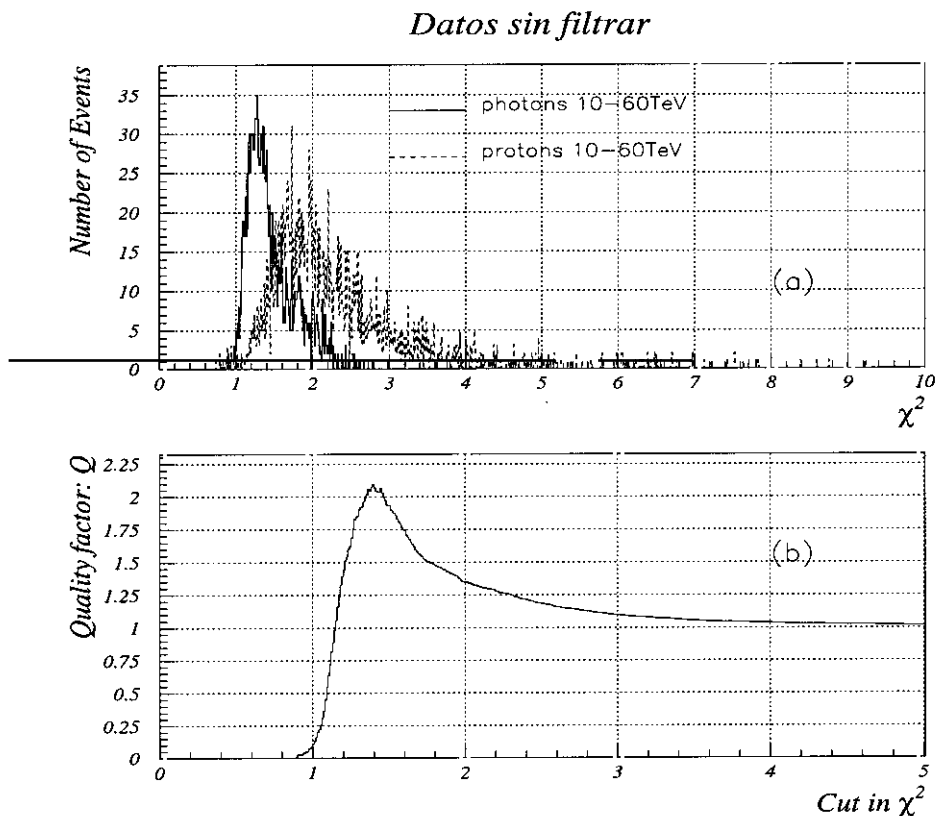


Figura 5.3: (a) Representación del estadístico  $\chi_r^2$  de acuerdo con la figura 5.2. (b) Factor de calidad  $Q$  para cortes según el valor de dicho estadístico.

Téngase en cuenta que esto representa un *corte mínimo* en los datos que puede efectuarse sin la información disponible sobre la estructura de las fluctuaciones. Es de esperar que su consideración nos lleve a una mejora en el enriquecimiento en fotones de las muestras tras la aplicación del corte.

## 5.2 La mejor separación $\gamma$ /protón

Considerando globalmente todos los protones (**p**) por un lado, todos los fotones ( $\gamma$ ) por otro y finalmente el conjunto de todos los sucesos disponibles en las muestras (**rc**, de rayo cósmico), sin distinción de tipo o energía, se puede estimar la PSD de todos esos grupos de sucesos considerándolos procesos estocásticos individualizados. En la figura 5.4 se representa el

$\log P(k)$  frente al  $\log k$  para los agrupamientos señalados de sucesos, a la

Sucesos	Partícula	E(TeV)	A	B	C	$\chi^2/ndf$
4143	rc	10-60	1.27(3)	1.03(1)	0.1004(6)	1.0
2464	p	10-60	2.00(4)	1.06(1)	0.0925(7)	1.0
1679	$\gamma$	10-60	0.26(1)	(*)	0.1165(5)	1.0

Tabla 5.1: *Parámetros A, B y C de los filtros globales universal: rc, de protones: p y de fotones:  $\gamma$  para análisis lejano. En (\*) se asume que  $B = 1$ .*

manera vista en el capítulo 3, pudiéndose apreciar que resulta posible aplicar de nuevo el modelo introducido en (3.12). La tabla 5.1 muestra los valores de los parámetros A, B, C y el indicador de la bondad del ajuste<sup>4</sup>  $\chi_r^2$ . Se hace notar asimismo que para los fotones agrupados se supone que  $B \sim 1$ . Si se filtran las muestras globales de protones y fotones me-

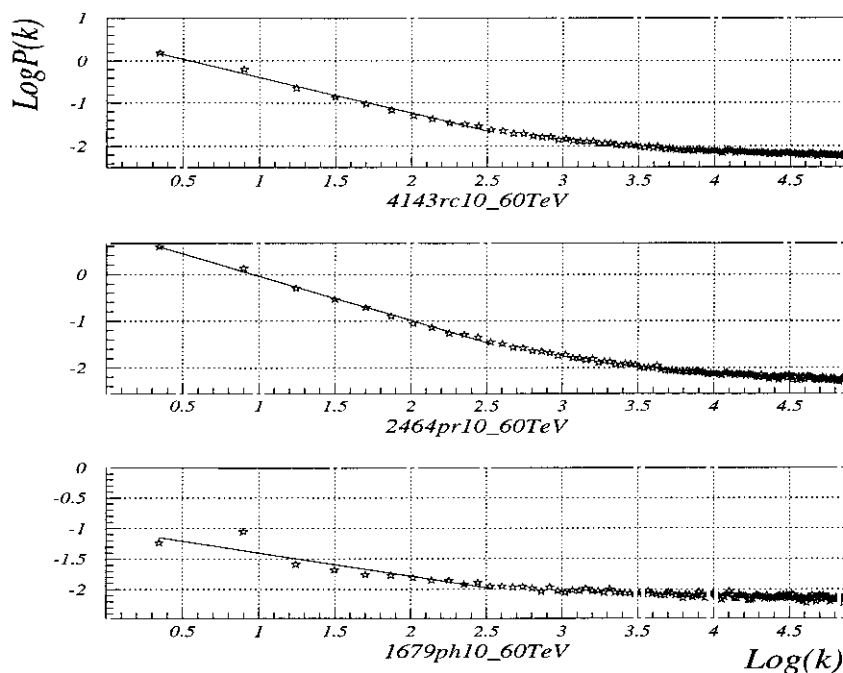


Figura 5.4: *Representación logarítmica de la PSD global y de las muestras agrupadas por tipo de primario para análisis en coronas lejanas.*

<sup>4</sup>Este estimador no se refiere al introducido en (5.2) sino al estandar (5.1).



diente (3.14) donde A y C se extraen de los correspondientes a cada muestra según la tabla 5.1, el cálculo del estadístico  $\chi_r^2$  revela que protones y fotones filtrados pueden ser casi completamente separados con arreglo al valor de este parámetro. La figura 5.5 es bastante ilustrativa y no precisa más comentario que el relativo a los valores obtenidos del estadístico.

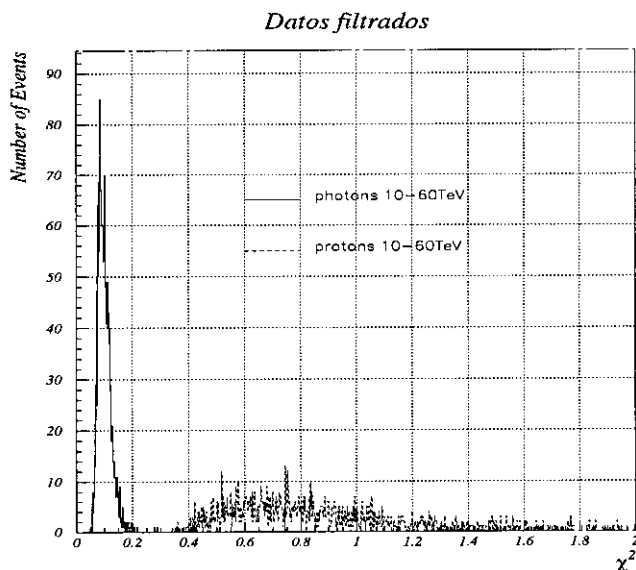


Figura 5.5: *Distribución del estadístico  $\chi_r^2$  en análisis lejano, para las muestras de fotones y protones primarios, habiendo filtrado la componente de ruido blanco mediante un filtro adaptado al tipo de muestra.*

Los bajos valores del estadístico son una consecuencia directa de la fuerte correlación que presentan los datos para cada suceso y revelan lo inadecuado del modelo de regresión utilizado. Por otro lado, los fotones presentan menores desviaciones respecto de la media constante que los protones, por lo que es de esperar un valor mas pequeño para el estimador  $\chi_r^2$ . La prácticamente completa separación entre los dos tipos de primarios daría lugar a

factores de calidad muy elevados. Otra propiedad destacable es la invariancia de estos resultados con el bineado o resolución elegida para representar los datos. Esto refuerza nuestra tesis acerca de la invariancia de escala manifestada por la señal residual una vez filtrado el ruido blanco. En las próximas secciones volveremos sobre este punto para mostrar resultados gráficos que apoyan estas afirmaciones. En análisis cercano, los resultados son completamente similares.

A pesar de los muy esperanzadores resultados encontrados más arriba, no pueden usarse como método de discriminación, pues sería necesario conocer previamente los parametros A, B y C del filtro adaptado que hay que aplicar a cada suceso individual y esta información equivale a conocer el tipo de primario. Por otro lado, los parámetros A y C son funciones de la energía

y del tipo de suceso<sup>5</sup>. Las figuras 5.6 registran estas dependencias para los seis valores de la energía correspondientes a los sucesos de la librería clasificada por energía mientras que en las figuras 5.7 se representa lo mismo para la librería clasificada por el número de partículas secundarias recogidas en las coronas. Dando por supuesto que no vamos a tener información alguna sobre el tipo de primario asociado a un suceso objeto de clasificación ni tampoco, *a priori*, de la energía, podremos aplicarle un filtro construido con

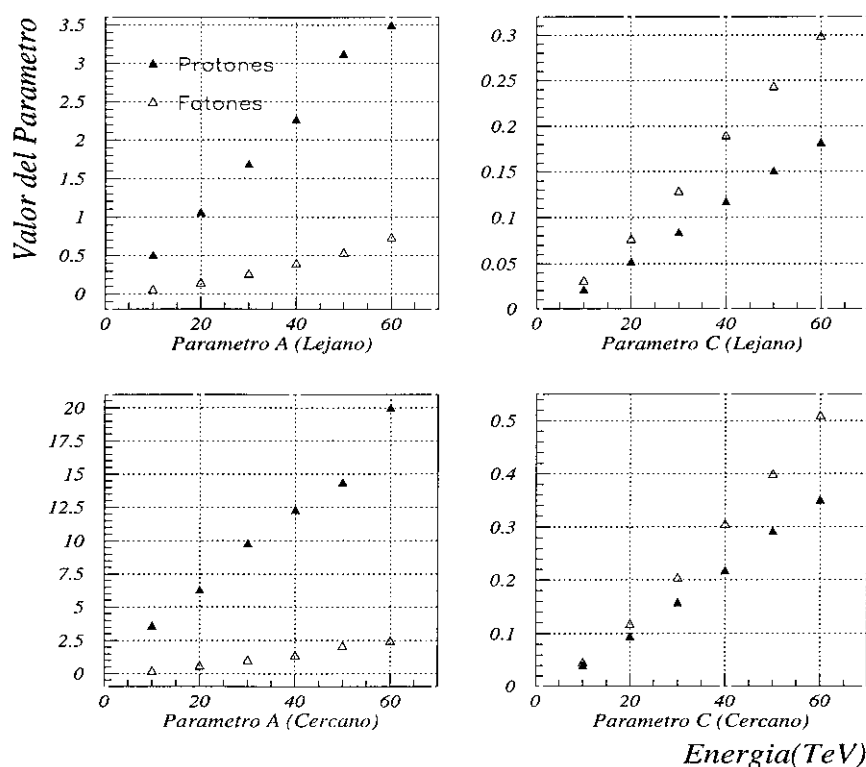


Figura 5.6: Dependencia con la energía de los parámetros A y C para todos los primarios clasificados por energía en las coronas lejanas y cercanas.

valores globales de los parámetros[109], lo que da origen al procedimiento de separación mediante el denominado **filtro global** que será el objeto de la próxima sección.

<sup>5</sup>No se considera la dependencia del parámetro B, el cual solo difiere de la unidad para los protones en análisis cercano a cualquier energía.

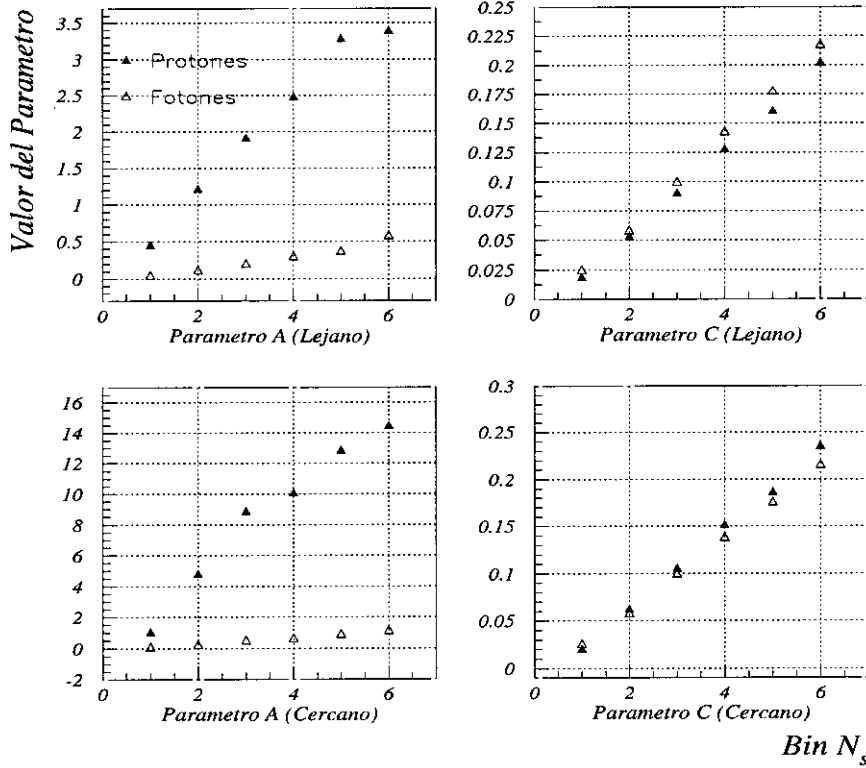


Figura 5.7: Dependencia con el bin  $\Delta N_s$  de los parámetros  $A$  y  $C$  para todos los primarios clasificados por  $N_s$  en las coronas lejanas y cercanas.

### 5.3 El método más sencillo: el filtro global

Visto que la eliminación del ruido blanco mejora la identificación de los sucesos, se impone el diseño de un método simple que realice, al menos parcialmente, este filtrado sin presuponer conocimiento alguno acerca de la energía. Cualquier procedimiento útil en la práctica que pretenda obtener rendimientos óptimos en la separación de primarios mediante filtrado de los ruidos blancos presentes en las señales de los sucesos, deberá emplear un *filtro global*. El filtro global no es otra cosa que los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  adecuados para poner en la función de transferencia  $h(k)$  y que proporcione en el análisis  $\chi_r^2$  la máxima separación posible entre las distribuciones de los diferentes primarios. Los filtros globales que van a ser considerados son de tres tipos:

1. **Filtro global universal:** Los parámetros A, B y C se evalúan suponiendo que todos los sucesos son realizaciones de un único proceso estocástico cuya PSD se ajusta a la función

$$P(k) = \frac{A}{k^B} + C \quad (5.5)$$

2. **Filtro global de protones:** Lo mismo que el anterior pero considerando que sólo los protones son las realizaciones del proceso estocástico.
3. **Filtro global de fotones:** Idéntico al anterior pero esta vez con los fotones.

La tabla 5.1 ya resume los parámetros de estos filtros globales en análisis lejano que después se aplicarán a las bases de datos<sup>6</sup>. La tabla 5.2 recoge los correspondientes valores en análisis cercano. En ella no se considera el

Sucesos	Partícula	E(TeV)	A	B	C	$\chi^2/ndf$
2464	p	10-60	9.9(3)	1.44(2)	0.168(1)	1.0
1679	$\gamma$	10-60	0.93(2)	(*)	0.188(1)	0.8

Tabla 5.2: Parámetros A, B y C de los filtros globales de protones: **p** y de fotones:  $\gamma$  según el análisis cercano. En (\*) se asume que  $B = 1$ .

filtro global universal puesto que los protones en análisis cercano presentan un carácter no estacionario que no conviene mezclar con los fotones cuya estacionaridad esta comprobada.

### 5.3.1 Filtro global universal

Filtrando tanto los protones como los fotones mediante la función de transferencia (3.14) con los valores de A y C correspondientes al tipo **rc** de la tabla 5.1 y evaluando el factor de calidad para el corte según el estadístico  $\chi_r^2$ , se obtiene la figura 5.8. La ganancia en Q respecto de la figura 5.3 es bastante significativa. Se pueden obtener factores superiores a  $Q = 4.0$  para cortes en el valor del estadístico de  $\chi_r^2 \approx 0.35$ . Se aprecia, asimismo, que las distribuciones de este parámetro son bien distintas de las encontradas en las figuras 5.3 y 5.5, en lo referente a las posiciones de los máximos y a las anchuras de las mismas. A la vista de estos resultados, el procedimiento

<sup>6</sup>Debido a la criticidad, ya discutida en el capítulo 3, de las muestras de fotones, se supone que  $B \simeq 1$ , ya que sólo así obtenemos unos datos filtrados que presentan leyes de escala con el número de sectores en que se divide la corona.

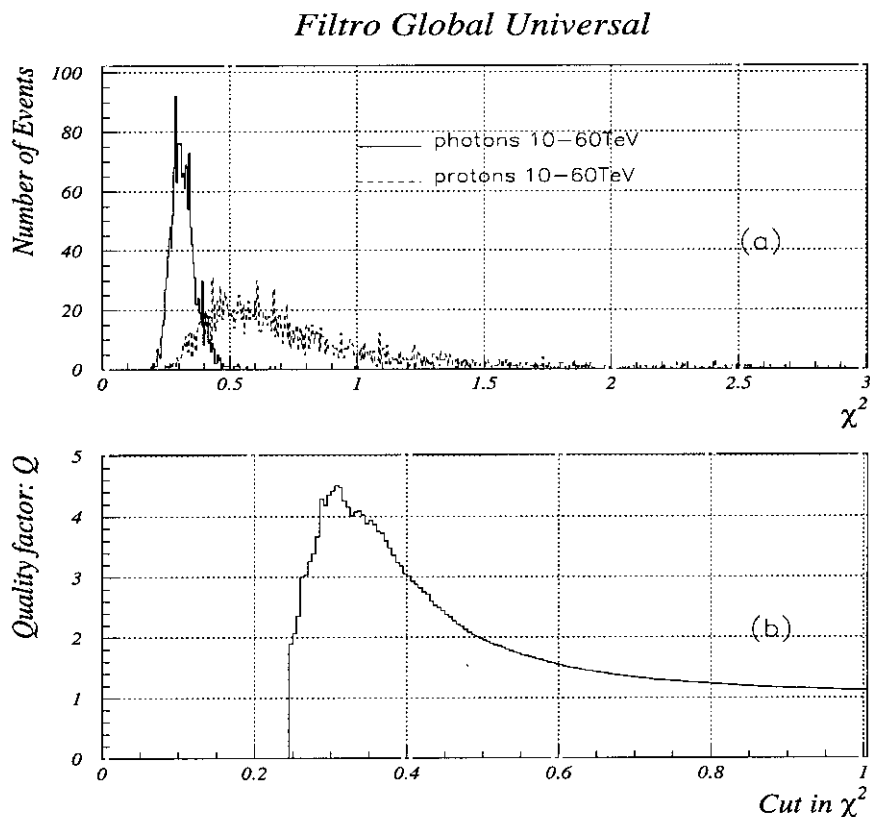


Figura 5.8: (a) Representación del estadístico  $\chi_r^2$  para fotones y protones filtrados mediante el filtro global universal en análisis lejano. (b) Factor de calidad  $Q$  para cortes según el valor de dicho estadístico.

a seguir para enriquecer una muestra compuesta de fotones y protones en sucesos del primer tipo consistiría en la aplicación del filtro global universal y el cálculo posterior del parámetro  $\chi_r^2$ . Si dicho valor es superior al valor de corte que maximiza  $Q$ , el suceso se cataloga de protón y se rechaza.

### 5.3.2 Filtro global de protones

Si se filtran ahora tanto los fotones como los protones mediante la función de transferencia (3.14) con los valores de  $A$  y  $C$  correspondientes al tipo  $p$  de las tablas 5.1 y 5.2 y se calcula el factor de calidad en ambas situaciones, se obtiene la figura 5.9. En ella puede observarse que no se mejora sensiblemente el factor de calidad respecto al filtro anterior obteniéndose valores similares

### Filtro Global de Protones

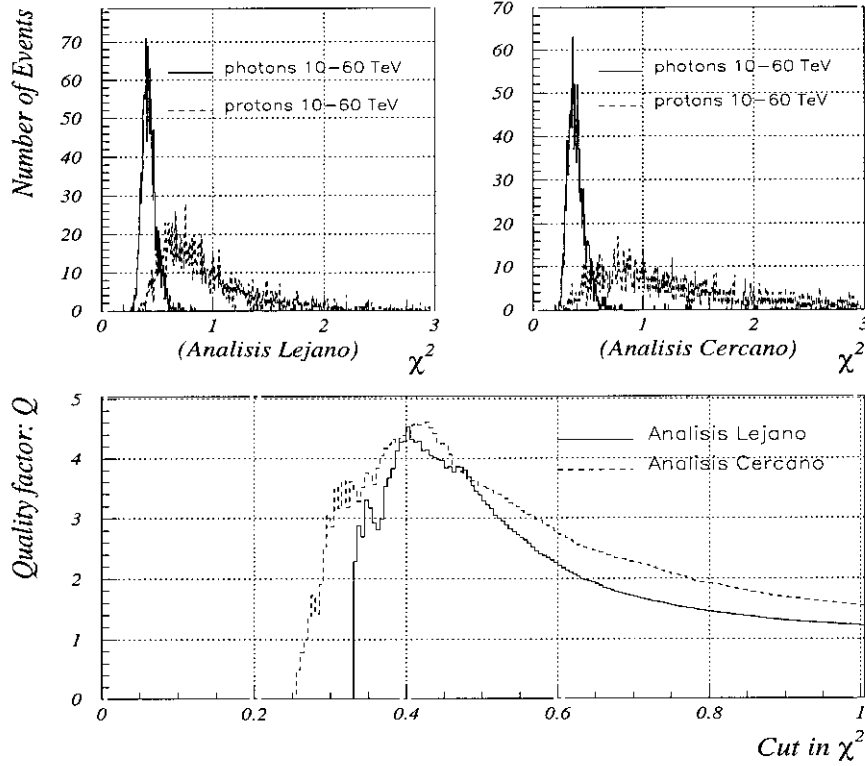


Figura 5.9: (a) Representación del estadístico  $\chi_r^2$  para fotones y protones filtrados mediante el filtro global de protones en análisis lejano. (b) Igual que el anterior pero en análisis cercano. (c) Factor de calidad  $Q$  para cortes según el valor del estadístico para los dos tipos de análisis.

en  $Q$  para cortes en el estadístico en torno a  $\chi_r^2 \approx 0.4$ . Se aprecia finalmente que estas conclusiones son válidas independientemente del tipo de análisis, lejano/cercano, que se considere.

### 5.3.3 Filtro global de fotones

Para finalizar, se ha realizado la misma operación utilizando el tipo  $\gamma$  de las tablas 5.1 y 5.2 obteniéndose la figura 5.10. En ella se aprecian unos factores de calidad algo menores respecto al procedimiento anterior. Además, hay diferencias en el valor de corte entre el análisis lejano y el cercano. Para el primero el corte se sitúa en torno a  $\chi_r^2 \approx 0.1$ , mientras que para el segundo

### Filtro Global de Fotones

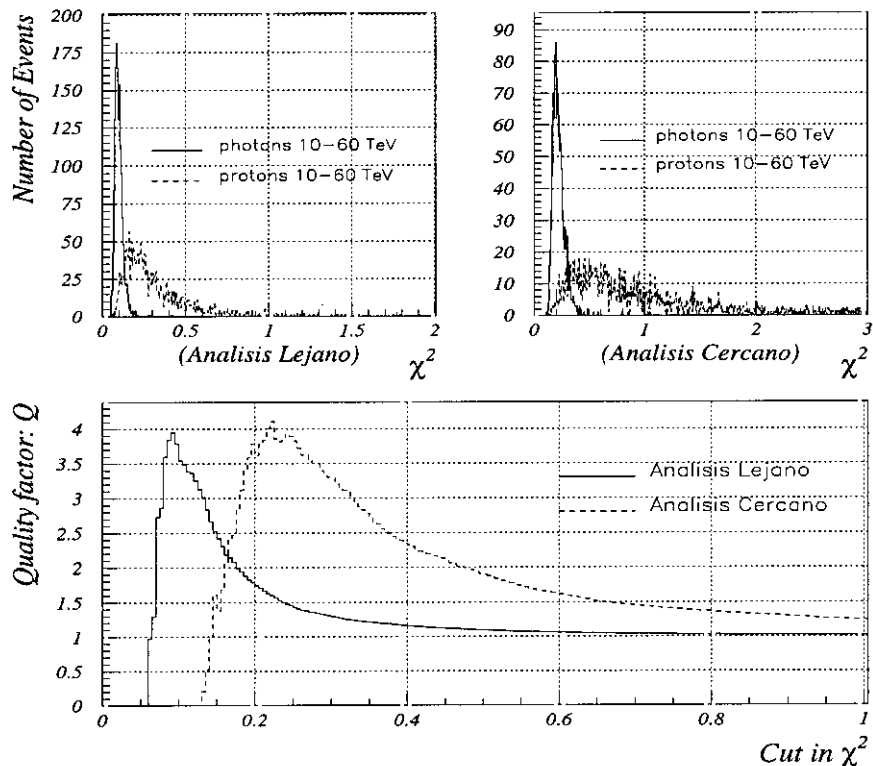


Figura 5.10: (a) Representación del estadístico  $\chi^2_r$  para fotones y protones filtrados mediante el filtro global de fotones en análisis lejano. (b) Igual que el anterior pero en análisis cercano. (c) Factor de calidad  $Q$  para cortes según el valor del estadístico para ambos tipos de análisis.

el máximo se encuentra para  $\chi^2_r \approx 0.25$ .

#### 5.3.4 Resumen de valores de corte y factores de calidad

A modo de conclusión de esta sección, se ofrece la tabla 5.3 que resume la acción de los diversos filtros propuestos con el fin de conseguir optimizar el método de separación propuesto.

Tipo de Análisis	Filtro	Corte en $\chi_r^2$	Factor Q
Lejano	universal	0.3	4.5
	protones	0.4	4.5
	fotones	0.1	4.0
Cercano	protones	0.4	4.5
	fotones	0.25	4.0

Tabla 5.3: Valores de corte del estadístico  $\chi_r^2$  que maximizan el factor de calidad  $Q$  para distintos tipos de filtro aplicado, según análisis lejano y cercano.

## 5.4 Dependencia de la escala

Resulta interesante efectuar un análisis de la variación de la distribución del estadístico y del valor que maximiza  $Q$ , cuando cambia el número de sectores por corona, es decir, cuando varía la resolución con que se determina la densidad de partículas que llegan a las coronas. Suponiendo, como se hizo en §5.1, que la media ergódica o media sobre cada realización,  $\langle \epsilon_\lambda(x) \rangle_x$ , pueda considerarse constante de una realización a otra, puede obtenerse fácilmente que, para una resolución  $\lambda$ , el valor medio del estadístico depende de  $\lambda$  de la forma

$$\langle \chi_r^2 \rangle \sim \lambda^{K(2)} - 1 \quad (5.6)$$

donde  $K(2)$  es el exponente de escalado de los momentos estadísticos, introducido en (1.90), para  $q = 2$ . Esta dependencia proviene del término cuadrático en los datos,  $\langle \epsilon_\lambda(i)^2 \rangle \sim \lambda^{K(2)}$ , incluido en la definición del estadístico (5.2). Se aprecia claramente que las distribuciones se han de desplazar hacia los valores menores de  $\chi_r^2$  cuando se disminuye la resolución  $\lambda$  y como consecuencia, los valores de corte que maximizan  $Q$  sufrirán un corrimiento equivalente, como se refleja en la figura 5.11. Finalmente, el factor de calidad se ve ligeramente afectado por la escala de medida, con una tendencia a empeorar a bajas resoluciones. Este efecto es esperado, ya que a pesar de la invariancia de escala que debe manifestar toda operación con los datos, es inevitable cierta pérdida de información en el proceso de degradación de la señal desde las escalas menores a las mayores. Como consecuencia de ello, perdemos detalles de la estructura de las fluctuaciones que diferencian a ambos tipos de primarios, y las distribuciones del estadístico pueden solaparse algo más. Para análisis cercano, los resultados son similares, como refleja la figura 5.12.



### Dependencia con el número de sectores

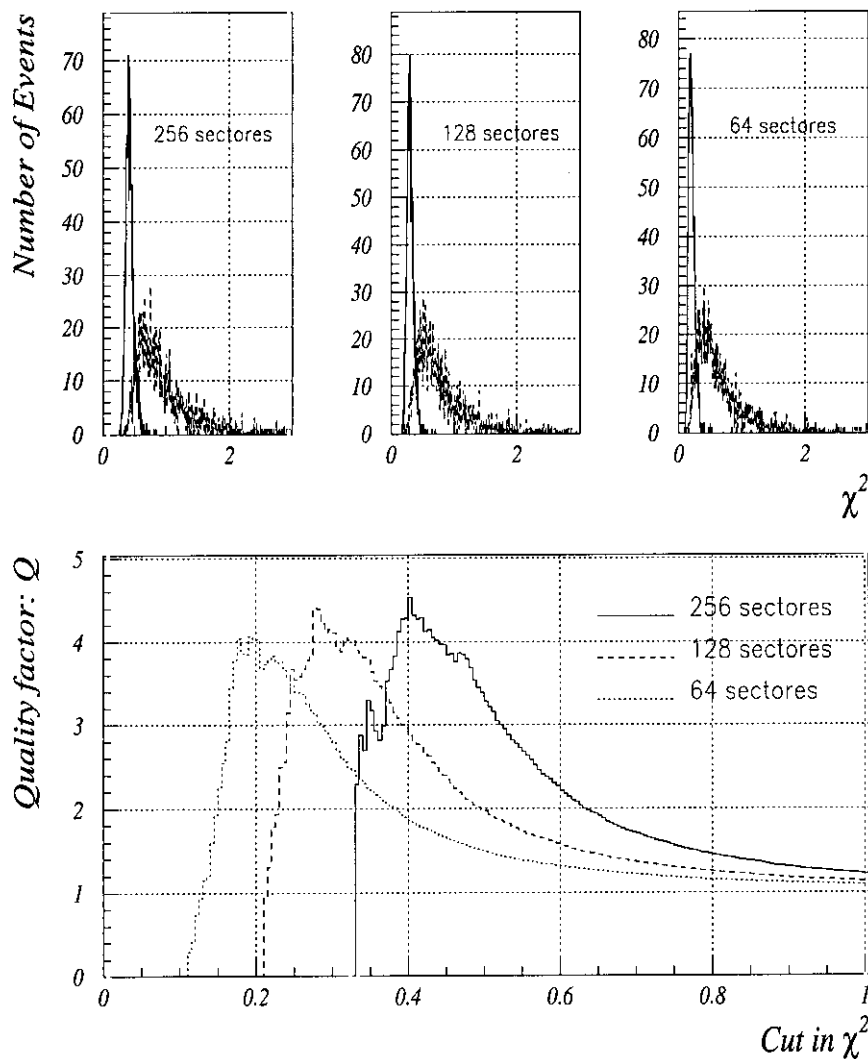


Figura 5.11: Representación del estadístico  $\chi_r^2$  para las muestras de fotones y protones filtradas mediante el filtro global de protones, cuando variamos el número de sectores de la corona en análisis lejano (parte superior). En la parte inferior se muestran los factores de calidad  $Q$  obtenidos para las escalas consideradas.

### Dependencia con el número de sectores

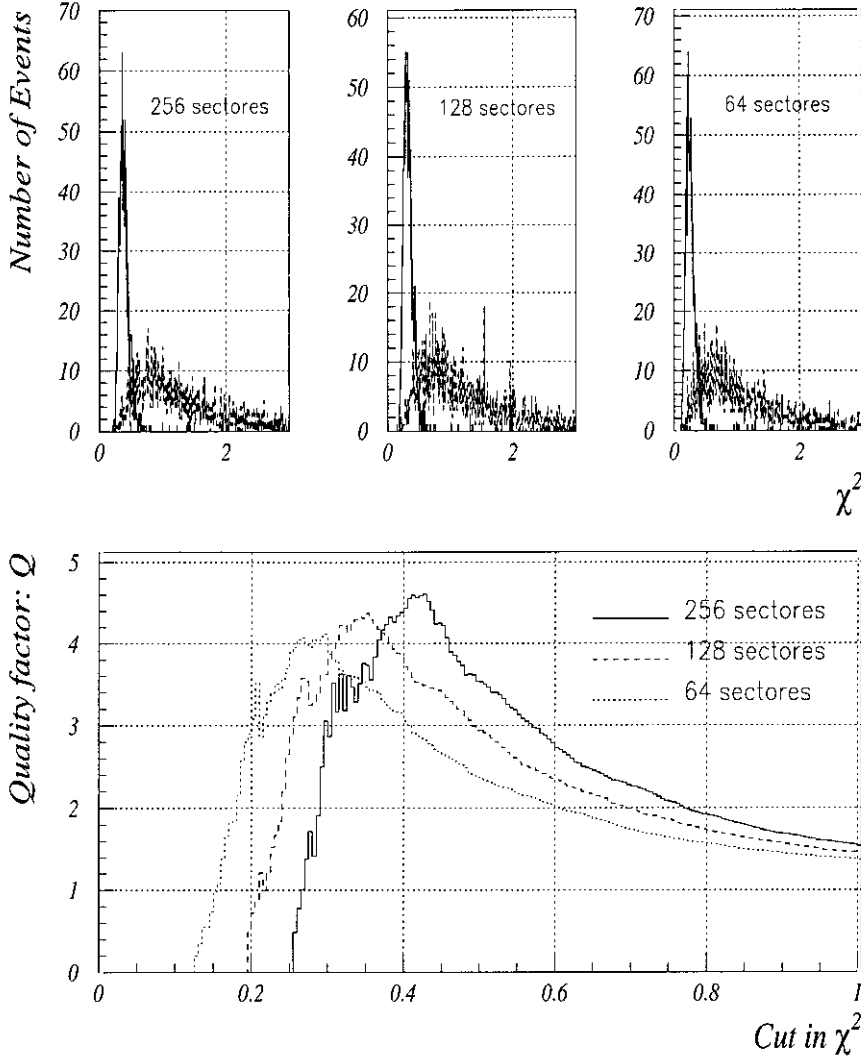


Figura 5.12: Representación del estadístico  $\chi_r^2$  para las muestras de fotones y protones filtradas mediante el filtro global de protones, cuando variamos el número de sectores de la corona en análisis cercano (parte superior). En la parte inferior se muestran los factores de calidad  $Q$  obtenidos para las escalas consideradas.

# Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han estudiado las características de las fluctuaciones en la distribución lateral de partículas secundarias observadas en cascadas atmosféricas (EAS), simuladas por Monte Carlo, producidas por radiación cósmica de alta energía en el rango de 10 a 60 TeV. Para ello, se ha construido una librería de sucesos mediante el código CORSIKA 4.50 que contiene EAS producidos por protones y fotones primarios en número suficiente como para poner en evidencia la estructura que poseen las mencionadas fluctuaciones.

Las principales aportaciones de este trabajo son las siguientes:

- Se ha hecho una revisión de los conceptos y características presentes en la teoría de los fractales y multifractales, procurando ofrecer una visión panorámica, poco frecuente en la literatura, que ayude a delimitar claramente el contexto en el que se realiza este estudio.
- Se ha realizado una descripción de los aspectos más relevantes para este trabajo de la naturaleza, características y simulación por Monte Carlo de la radiación cósmica.
- Dentro de la representación unidimensional de las EAS, se ha calculado la distribución de la densidad de las partículas secundarias que llegan a tierra procedentes de protones y rayos  $\gamma$  primarios de la radiación cósmica.
- Se han analizado las fluctuaciones en la distribución de la densidad de partículas en función del ángulo azimutal en anillos alrededor del core de las EAS.
- Utilizando la teoría de los procesos estocásticos en lo relativo al análisis de correlación mediante el uso de la Densidad de Energía Espectral (PSD), se ha encontrado que las fluctuaciones de la densidad de partículas no se comportan como un simple ruido blanco, tal como se supone implícitamente en el modelo de cascada media (NKG). Por el contrario,

las fluctuaciones muestran una estructura compleja y se ha encontrado que consisten esencialmente de un ruido  $1/f$  superpuesto a un ruido blanco.

- Tras eliminar el ruido blanco mediante un filtro adecuado, se han estudiado las propiedades de escalamiento del ruido  $1/f$ . Se ha visto que los exponentes de escalado  $K(q)$  son no lineales y corresponden a una estructura multifractal.
- Se ha mostrado que la estructura multifractal de las fluctuaciones en la distribución de partículas puede ser encuadrable dentro del esquema de los multifractales universales y por consiguiente puede caracterizarse mediante tres parámetros que contienen la información estadística mas relevante: el *índice de Levy*  $\alpha$ , la *codimensión media*  $C_1$ , y para las señales no estacionarias el *exponente de no estacionaridad*  $H$ . Los valores encontrados permiten afirmar que se trata de señales de baja intermitencia ( $C_1 \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ ) con una distribución de valores cercana a la lognormalidad ( $\alpha \simeq 2$ ) y un grado de no estacionaridad bajo ( $H \sim 0.2 - 0.3$ ).
- Se han encontrado diferencias notables entre las estructuras multifractales de las fluctuaciones de la densidad de partículas secundarias en las cascadas originadas por protones y fotones cósmicos. En primer lugar, los valores del parámetro  $C_1$  para protones y fotones difieren en un orden de magnitud tanto para análisis lejano como cercano. En segundo lugar, para análisis en las coronas cercanas, los protones presentan un grado de no estacionaridad  $H$  no nulo mientras que la señal producida por los fotones continúa siendo estacionaria.
- Se ha encontrado una posible aplicación práctica del estudio de las fluctuaciones de la distribución de partículas secundarias, que puede permitir distinguir estadísticamente si la partícula primaria es un protón o un rayo  $\gamma$ . La medida del poder separador del método propuesto la proporciona el factor de calidad  $Q$ , el cual alcanza valores cercanos a 4.5, resultado que permite depurar aceptablemente una muestra compuesta por sucesos originados por ambos tipos de primarios y enriquecerla en fotones.

# Apéndice A

## Probabilidad y procesos multiplicativos

### A.1 Algunas definiciones previas

Supóngase que  $X$  y  $\{X_i\}_{i=1}^n$  representan variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, (iid), con la misma distribución  $\rho$  y considérese que  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Se dice que la distribución  $\rho$  es **estable** en un sentido amplio, si, para todo  $n$ , existen constantes de normalización  $a_n > 0$  y  $b_n$  tales que  $S_n = a_n X + b_n$ <sup>1</sup> y  $\rho$  no está concentrada en un sólo punto. Se dice que es estable en sentido estricto si  $b_n = 0$ . Se puede demostrar que las constantes  $a_n$  son de la forma  $a_n = n^{1/\alpha}$ , donde  $0 < \alpha \leq 2$  se llama *exponente característico* de  $\rho$ .

Se dice que la distribución  $\rho$  del párrafo anterior, pertenece al *dominio de atracción* de la distribución  $\theta$ , si existen constantes  $a_n > 0$  y  $b_n$  tales que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \rightarrow \theta \quad (\text{A.1})$$

Se puede demostrar que la distribución  $\rho$  tiene dominio de atracción, si y solo si es estable.

### A.2 Funciones características

Las funciones características constituyen una eficaz herramienta en teoría de la probabilidad junto con la suma de variables aleatorias y las leyes que satisfacen en situaciones especiales. Consideremos una variable aleatoria real

---

<sup>1</sup>La igualdad ha de entenderse en el sentido de igualdad de sus distribuciones.

$X$  con densidad de probabilidad  $\rho(X)$ . La **Función Característica** (FC) de  $X$  se define por

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jqX} \rho(X) dX \quad (\text{A.2})$$

lo cual significa que la FC es la transformada de Fourier de la función densidad de probabilidad. Esto indica que el conocimiento de la FC equivale a conocer la distribución de probabilidad para la variable  $X$ . Como propiedad más notable de la FC utilizada aquí, se menciona que la suma de dos variables aleatorias  $X_1 + X_2$ , que tiene como función de distribución la convolución de las dos distribuciones,  $\rho_1 \otimes \rho_2$ , tiene como FC el producto  $\varphi_1 \varphi_2$  de las correspondientes a cada una de ellas, propiedad que se deriva del comportamiento de la transformada de Fourier de una convolución.

### A.3 Distribuciones gaussianas

La FC de una densidad gaussiana con  $\sigma = 1$  es

$$\varphi(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (\text{A.3})$$

Las distribuciones gaussianas son estables, ya que la suma de  $n$  variables gaussianas,  $S_n$  tiene por función característica

$$\varphi^n(q) = e^{-\frac{nq^2}{2}} \quad (\text{A.4})$$

lo que demuestra que  $\varphi^n(q/\sqrt{n}) = e^{-\frac{q^2}{2}}$ , es decir,  $S_n/\sqrt{n}$ , es una variable aleatoria gaussiana. Además las distribuciones gaussianas son *atractivas* debido al Teorema Central del Límite. Así es, en efecto, ya que dicho teorema asegura que la suma  $S_n$  de variables iid con  $\langle X_j \rangle = 0$  y  $\langle X_j^2 \rangle = 1$  se distribuye con arreglo a la ley gaussiana, es decir,

$$\varphi^n(q/\sqrt{n}) \rightarrow e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (\text{A.5})$$

Estas propiedades de las distribuciones gaussianas, estabilidad y atractividad, son argumentos de peso en favor de su aplicabilidad a la física cuando se estudian procesos en los que se suman variables aleatorias o **aditivos**. Sin embargo, también existen los procesos **multiplicativos**, para los que también es posible encontrar distribuciones estables y atractivas bajo multiplicación. Estas distribuciones son las *distribuciones estables de Levy*.

## A.4 Distribuciones infinitamente divisibles

Una distribución cuya FC es  $\varphi$  se dice *infinitamente divisible* si, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe una función característica  $\varphi_n$  tal que  $(\varphi_n)^n = \varphi$ . Esto significa que  $\varphi$  se puede descomponer en el producto de  $n$  funciones características. Las distribuciones más conocidas, como la gaussiana, Poisson, Gamma y Cauchy, pertenecen a esta categoría.

Para las distribuciones infinitamente divisibles se puede definir una *segunda función característica* SFC mediante

$$\omega(q) = \log(\varphi(q)) \quad (\text{A.6})$$

Según el teorema de Levy-Khinchine, la SFC en la forma canónica para distribuciones infinitamente divisibles es

$$\omega(q) = -\frac{1}{2}\sigma^2 q^2 + jqb + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{jqX} - 1 - jqX)F(X)dX \quad (\text{A.7})$$

donde  $F(X)$  es una medida de probabilidad y  $\sigma$  y  $b$  constantes que pueden valer cero. La elección de la medida  $F(X)$  determina la forma de la función característica,  $\varphi$ , de la distribución infinitamente divisible.

## A.5 Distribuciones estables de Levy

Con la elección  $F(X) = AX^{-\alpha}$  con  $0 \leq \alpha \leq 2$ , se obtiene

$$\omega(q) = jq\gamma - c|q|^\alpha \left[ 1 + j\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] \quad (\text{A.8})$$

donde  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $c \geq 0$  y  $\gamma \in \mathfrak{R}$ . El parámetro  $\alpha$  recibe el nombre de *índice* de la distribución. La expresión (A.8) resume todas las situaciones posibles que podemos encontrar. El caso más sencillo es  $\omega(q) = -cq^\alpha$ , que coincide con la distribución gaussiana para  $\alpha = 2$ .

Las distribuciones de Levy gozan de las propiedades de estabilidad y atractividad exigidas para ser consideradas como una generalización de las leyes gaussianas.

- **Estabilidad:** La suma normalizada  $S_n/n^{1/\alpha}$  de  $n$  distribuciones estables de Levy de índice  $\alpha$  es, también, una distribución estable de índice  $\alpha$ .

- **Atractividad:** Aunque para distribuciones estables de Levy de índice  $\alpha < 2$ , la varianza diverge, continúa siendo una distribución atractiva. Por tanto, existe una versión generalizada del Teorema Central del Límite: Si tomamos  $n$  variables aleatorias  $X_i$ , tales que  $\langle X_i \rangle = 0$  y  $\langle X_i^2 \rangle = \infty$ , pero existiendo un  $\alpha < 2$  tal que  $\langle X_i^\alpha \rangle = 1$  y  $\langle X_i^\beta \rangle = \infty$ , para todo  $\beta > \alpha$ , entonces

$$\varphi^n(S_n/n^{1/\alpha}) \rightarrow e^{-cq^\alpha} \quad (\text{A.9})$$

lo que significa que la suma normalizada es *atraída* por una distribución estable de Levy de índice  $\alpha$ .

## A.6 Multifractalidad y distribuciones de Levy

La definición de FC dada en (A.2) puede escribirse, también, como una Transformada de Laplace

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{qX} \rho(X) dX \quad (\text{A.10})$$

que, en otras palabras, significa  $\varphi(q) = \langle e^{qX} \rangle$ . Dado que, según la (1.63),  $\langle \epsilon_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K(q)}$ , donde  $\lambda \sim 1/\delta$ , esta expresión se puede poner también como

$$\langle e^{q \ln(\epsilon_\lambda)} \rangle \propto e^{K(q) \ln(\lambda)} \quad (\text{A.11})$$

lo que muestra que  $K(q) \ln(\lambda)$  es la segunda FCL de la variable aleatoria  $\Gamma_\lambda = \ln(\epsilon_\lambda)$ , también llamada frecuentemente *generador* de  $\epsilon_\lambda$ . Como se trata de un proceso multiplicativo,  $\ln(\epsilon_\lambda)$  es la suma de variables iid y por tanto hay que sumar generadores. Usando distribuciones estables y atractivas para estos, se obtendrá una clase de medidas multifractales  $\epsilon_\lambda$  con carácter de universalidad. Con estas premisas, la forma de la segunda FCL es  $w(q) = Aq - Bq^\alpha$  que junto a las condiciones  $K(0) = K(1) = 0$  y (1.70), resulta finalmente

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (\text{A.12})$$

El caso  $\alpha = 2$  corresponde al proceso conocido como *log-normal*.



## Apéndice B

# Simulación de multifractales universales

Para los Multifractales Universales conservativos, la función  $K(q)$  viene parametrizada sólo por dos variables, el índice de Levy  $\alpha$  y la codimensión media  $C_1$ , los cuales se pueden estimar, con una precisión suficiente, gracias a la técnica DTM, vista en 1.5.6. Para situaciones no conservativas es necesario filtrar los datos iniciales mediante el parámetro de no estacionaridad  $H = \zeta(1)$ . En este apéndice tratamos el problema inverso, es decir, dados los coeficientes  $\alpha$ ,  $C_1$  y  $H$  de no estacionaridad, simular un proceso estocástico que tenga la misma estadística.

### B.1 Simulación de cascadas discretas

Supongamos  $n$  pasos de un proceso a cascada multiplicativa con un factor de escala 2 entre pasos sucesivos. Esto significa que, tras  $n$  pasos, tendremos  $\lambda = 2^n$  intervalos o medidas diferentes, cuya estadística debe corresponder a

$$\langle \epsilon_\lambda^q \rangle = \langle e^{q\Gamma_\lambda} \rangle = e^{n \ln(2) K(q)} \quad (\text{B.1})$$

donde  $K(q)$  viene dada por (1.90). Esto se realiza multiplicando  $n$  factores aleatorios, que corresponde a sumar  $n$  variables estables de Levy  $X_i$ . La variable resultante, se escribe en la forma

$$X = a \sum_{i=1}^n X_i - b \quad (\text{B.2})$$

con lo que el problema se reduce a encontrar las constantes  $a$  y  $b$  para recuperar las propiedades estadísticas deseadas. Debido a las propiedades de

estabilidad de las variables de Levy, vistas en el apendice A, se verifica que

$$\langle e^{(a \sum_{i=1}^n X_i - b)q} \rangle = e^{-bq + pa^\alpha q^\alpha} \quad (\text{B.3})$$

donde hemos utilizado el que las  $X_i$  son iid y que, además, son variables de Levy *unitarias*, para las que se cumple que  $\langle e^{qX} \rangle \equiv e^{q^\alpha}$ . Por tanto, las constantes deben valer

$$a = |\ln(2) \frac{C_1}{\alpha - 1}|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{B.4})$$

$$b = n \ln(2) \frac{C_1}{\alpha - 1} \quad (\text{B.5})$$

y el algoritmo para generar las cascadas es el siguiente:

- Para generar una cascada con  $n$  etapas, esto es  $\lambda = 2^n$ , se generan, para cada etapa  $p$ , ( $1 \leq p \leq n$ ),  $2^p$  números obtenidos de una variable unitaria de Levy<sup>1</sup>.
- En la etapa final, tendremos  $2^n$  variables de Levy, cada una de las cuales es la suma de  $n$  variables obtenidas en las etapas precedentes.
- Para cada variable final se normaliza y traslada con las constantes  $a$  y  $b$  y se tiene construido, en este momento, el generador.
- Se exponencia el resultado para obtener el campo de datos final.

## B.2 Simulación de cascadas continuas

Las cascadas discretas tienen la evidente limitación del paso entre etapas sucesivas, que es discreto, de aquí el adjetivo empleado. Podemos eliminar este problema mediante un procedimiento más complejo que implica una *densificación de escalas*, es decir la introducción de escalas intermedias entre dos cualesquiera etapas sucesivas  $\lambda$  y  $2\lambda$ . La estructura de una cascada continua, presenta las siguientes características:

- La segunda función característica de  $\Gamma_\lambda$ , que es  $\ln(\lambda)K(q)$ , diverge logarítmicamente con  $\lambda$ .
- El generador  $\Gamma_\lambda$  es un ruido aleatorio correlacionado a banda limitada en el intervalo de números de onda  $[1, \lambda]$ , lo que garantizará que no habrá perturbaciones debidas a lo que ocurra a escalas inferiores<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Para este propósito, puede adoptarse el algoritmo propuesto por Chambers[110].

<sup>2</sup>Téngase presente que los datos a una cierta escala, en general son promedios o cantidades vestidas, por lo que, aquello que suceda a pequeña escala, puede ser relevante. Si,

- Para valores positivos del generador, la densidad de probabilidad  $\rho$  de  $\Gamma_\lambda$  debe caer a cero lo bastante rápido como para que  $K(q)$  pueda converger, para  $q > 0$ .

$$\lambda^{K(q)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{q\Gamma_\lambda} \rho(\Gamma_\lambda) d\Gamma_\lambda \quad (\text{B.6})$$

- Debido al vínculo de conservación, que supondremos canónico,  $\langle \epsilon_\lambda \rangle = 1$ , se tiene que  $K(1) = 0$ .

Se utilizará una representación en el espacio de Fourier del generador de la forma

$$\Gamma_\lambda(x) = \int_\lambda f(k) l(k) e^{jkx} dk \quad (\text{B.7})$$

donde la integración se realiza para  $1 \leq k \leq \lambda$ ,  $f(k)$  es un filtro real no aleatorio y  $l(k)$  es un ruido blanco de Levy de índice  $\alpha$ . El filtro  $f(k)$  es necesario para dotar al proceso de la oportuna correlación, siendo

$$f(k) = k^{-1/\alpha'} \quad \text{con} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad (\text{B.8})$$

Esto asegura que la función  $K(q)$  tendrá la forma deseada [110, 111, 112].

---

por ejemplo, a una escala mucho menor, ha tenido lugar una fluctuación extrema, esta puede dominar el promedio.



# Apéndice C

## Procesos estocásticos

Se resumen en este apéndice algunos resultados útiles relacionados con los procesos estocásticos y referidos especialmente a sus características espectrales. Para más detalles al respecto consúltense la referencias [31, 29, 30, 32, 36].

### C.1 PSD de procesos compuestos y sus propiedades.

Considérese un proceso estocástico  $s(x)$  que viene definido por la suma

$$s(x) = \epsilon(x) + w(x) \quad . \quad (C.1)$$

La función de autocorrelación  $R(x, x + \tau)$  de dicho proceso, definida por

$$R_s(x, x + \tau) = \langle s(x)s(x + \tau) \rangle \quad , \quad (C.2)$$

donde  $\langle * \rangle$  simboliza un promedio sobre la colectividad de realizaciones disponibles, puede escribirse del siguiente modo

$$R_s(x, x + \tau) = R_\epsilon(x, x + \tau) + R_w(x, x + \tau) + R_{\epsilon w}(x, x + \tau) + R_{w\epsilon}(x, x + \tau) \quad , \quad (C.3)$$

donde  $R_\epsilon$  designa la función de autocorrelación del proceso  $\epsilon(x)$ ,  $R_w$  la de  $w(x)$  y las funciones  $R_{\epsilon w}$  y  $R_{w\epsilon}$  son las correlaciones *cruzadas* entre ambos procesos, siendo, por ejemplo,  $R_{\epsilon w}(x, x + \tau) = \langle \epsilon(x)w(x + \tau) \rangle$ . Si  $\epsilon(x)$  y  $w(x)$  son estadísticamente independientes<sup>1</sup>, se cumple que  $R_{\epsilon w}(x, x + \tau) = \langle$

---

<sup>1</sup>La independencia estadística significa que no existe correlación entre ambos procesos y, por tanto, la *covariancia cruzada* definida por

$$C_{\epsilon w}(x, x + \tau) = \langle (\epsilon(x) - \langle \epsilon(x) \rangle)(w(x + \tau) - \langle w(x + \tau) \rangle) \rangle \quad (C.4)$$

es nula.

$\epsilon(x) > w(x + \tau) >$ , y si, además de esto, son procesos WSS con medias  $\epsilon_m$  y  $w_m$ , se verifica que

$$R_{\epsilon w}(\tau) = \epsilon_m w_m \quad . \quad (C.5)$$

Si alguno de los dos procesos WSS tiene media nula, se cumplirá que  $R_{\epsilon w}(\tau) = 0$ . Considerando la expresión (C.3), para el caso en que ambos procesos sean WSS e independientes, y tomando la transformada de Fourier de ambos miembros, se obtiene

$$P_s(k) = P_\epsilon(k) + P_w(k) + 2\pi\epsilon_m w_m \delta_D(k) \quad (C.6)$$

donde las transformadas de Fourier de las correlaciones cruzadas,  $P_{\epsilon w}$  y  $P_{w\epsilon}$ , son iguales dando lugar al término que contiene la función delta de Dirac. Además, se tiene que

$$P_{\epsilon w} \approx < \epsilon_F^*(k) w_F(k) > \quad (C.7)$$

De esta manera, para  $k > 0$ , la PSD de la señal  $s(x)$  puede considerarse como la suma de las PSD de los procesos  $\epsilon(x)$  y  $w(x)$ .

## C.2 Diferencias entre el filtrado ordinario y el filtrado intrínseco de procesos estocásticos

Consideremos un proceso estocástico  $s(x) = \epsilon(x) + w(x)$  donde los subprocesos  $\epsilon(x)$  y  $w(x)$  se consideran estadísticamente independientes y sean  $P_{s,th}(k)$ ,  $P_{\epsilon,th}(k) = \frac{A}{k^B}$  y  $P_{w,th}(k) = C$  las PSD teóricas respectivas, es decir, las que resultan de ajustar las respectivas PSD numéricas  $P_s(k)$ ,  $P_\epsilon(k)$  y  $P_w(k)$  a estas formas funcionales. Según lo visto en la sección anterior,  $P_{s,th}(k) = \frac{A}{k^B} + C$ . El problema que se plantea ahora es el de filtrar o eliminar de la señal inicial la componente  $w(x)$  que proporciona el término constante en la PSD.

Supongamos un filtro cuya función de transferencia viene dada por la ecuación

$$h(k) = \sqrt{1 - \frac{C}{P_s(k)}} \quad (C.8)$$

al que llamaremos *filtro intrínseco*, ya que hace uso de la PSD numérica  $P_s$  del propio proceso para definir su acción. La aplicación de este filtro en el espacio

## C.2 Diferencias entre el filtrado ordinario y el filtrado intrínseco de procesos estocásticos 167

de Fourier, conduce a una señal cuyo PSD,  $P_{s,fil}(k) \approx \langle |s_F(k)h(k)|^2 \rangle$  e igual a

$$P_{s,fil}(k) = P_s(k) \left(1 - \frac{C}{P_s(k)}\right) = P_s(k) - C = P_s(k) - P_{s,th}(k) + \frac{A}{k^B} \quad (C.9)$$

Si, por el contrario, consideramos la función de transferencia (filtrado ordinario)

$$h_{th}(k) = \sqrt{1 - \frac{C}{P_{s,th}(k)}} = \sqrt{\frac{A}{A + Ck^B}} \quad (C.10)$$

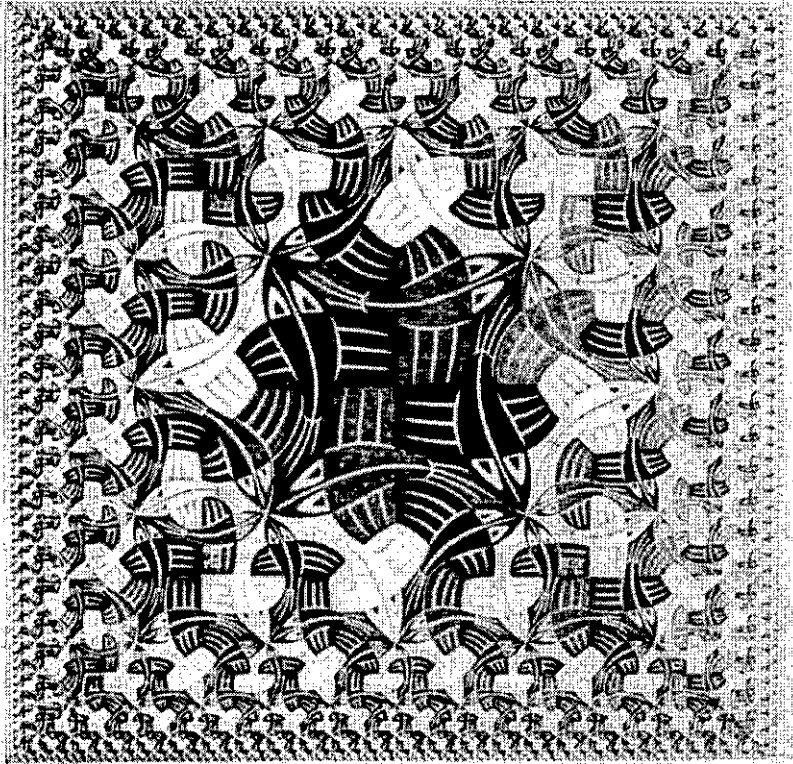
entonces la acción del filtro da lugar a que

$$P_{s,fil}(k) = P_s(k) \left(1 - \frac{C}{P_{s,th}(k)}\right) = \frac{P_s(k)}{P_{s,th}(k)} \frac{A}{k^B} \quad (C.11)$$

Es fácil darse cuenta de que (C.9) se encuentra dominada, para altos valores de  $k$ , por las diferencias existentes entre  $P_s$  y  $P_{s,th}$ , mientras que (C.11) tendrá un comportamiento más ajustado a  $A/k^B$ .







M.C. Escher. Cuadrado Limite. 1964



# Bibliografía

- [1] Feder, J., *Fractals*, Plenum 1988.
- [2] Guzmán, M., Martín, M.A., Morán, M., Reyes, M., *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor 1993.
- [3] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman 1982.
- [4] Schroeder, M., *Fractal Chaos and Power Laws*, Freeman 1991.
- [5] Gutenberg, B. and Richter, C.F., *Magnitude and Energy of Earthquakes*, Annali di Geofisica (Roma) 9, (1956b) 1-15.
- [6] Richardson, L.F., *The problem of contiguity: An appendix of statistics of deadly quarrels*. General Systems Yearbook 6, (1961) 139-87.
- [7] Scholz, C.H., Mandelbrot, B. eds., *Fractals in geophysics*, Birkhauser Verlag 1989.
- [8] Evertsz, C.J.G., *Fractal Geometry of Finacial Time Series*, Fractals, 3, No. 3, (1995) 609-616.
- [9] Sánchez, A., *Fractales y procesos de crecimiento*, Rev. Esp. de Fis. 6 (2), 1992.
- [10] Schertzer, D. and Lovejoy, S. *Scaling, Fractals and Nonlinear Variability in Geophysics*. Schertzer, D. and Lovejoy eds. (Kluwer, Holland, 1991) p. 41
- [11] Yamaguti, M., Hata, M., Kigami, J., *Mathematics of Fractals*, A.M.S. 1997.

- [12] Mandelbrot, B., *Self-affine fractal sets* in Fractals in Physics, Pietronero L. and Tosatti E., eds., North-Holland 1986, pp. 3-28.
- [13] Hausdorff, F., *Dimension und ausseres Mass*. Mathematisches Annalen **79**, (1919) 157-79.
- [14] Falconer, K., *Fractal Geometry*. Wiley 1990.
- [15] J. Barrallo: *Geometría Fractal. Algoritmia y Representación*. Guías Monográficas Anaya, Ed. Anaya (1993).
- [16] Caniego, J., *Análisis multifractal de la distribución de la porosidad del suelo*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid (1997).
- [17] Hutchinson, J., *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. J. of Math., **30**, (1981) 713-747.
- [18] Mandelbrot, B., *Multifractal measures, especially for the geophysicist*, Pure appl. Geophys. **131**, (1989) 5.
- [19] Parisi, G., Frisch, U., *A multifractal model of intermittency. Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi, North-Holland, 1985.
- [20] Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G., Vulpiani, A., *On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems*, J. Phys., A17, (1984) 3521-3531.
- [21] Grassberger, P., *Generalised dimensions of strange attractors*, Phys. Lett. A97, (1983) 227.
- [22] Hentschel, H.G.E. and Procaccia, I., *Intermittency exponents in fractally homogeneous turbulence*, Phys. Rev. Lett. **49**, (1982) 1158.  
Hentschel, H.G.E. and Procaccia, I., *The infinite number of generalised dimensions of fractal strange attractors*, Physica 8D, (1983) 435.
- [23] Grassberger, P., Procaccia, I., *On the characterization of strange attractors*, Phys. Rev. Lett. **50**, (1983) 346.

- [24] Badii, R. and Politi, A., *Complexity, hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge 1997.
- [25] Halsey, T.C., et al., *Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets*, Phys. Rev. A33, (1986) 1141.
- [26] Mach, J., et al., *Two representations in multifractal analysis*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, (1995) 5607-5622.
- [27] Meneveau, C. and Sreenivasan, K.R., *Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett. **59**, (1987) 1424.
- [28] Hastings, H.M., Sugihara, G., *Fractals. A user's guide for the natural sciences*. Oxford Univ Press 1993.
- [29] Feller, W., *Introduccion a la Teoria de las Probabilidades y sus Aplicaciones*, Vol II, 2nd ed. Limusa 1985.
- [30] Peebles, P., *Probability, Random Variables and Random Signals Principles*, 2nd ed. McGraw Hill 1987.
- [31] Chatfield, C., *The analysis of Time Series*, fourth ed., Chapman and Hall 1989.
- [32] Priestley, M.B., *Spectral analysis and time series*, Academic 1981.
- [33] Subba Rao, T., Priestley, M.B., Lessi, O., *Applications of time series analysis in astronomy and meteorology*, Chapman 1997.
- [34] Milotti, E., *El ruido 1/f*, Investigacion y Ciencia, Dic. 1996.
- [35] Klafter, J. et al., *Beyond Brownian Motion*. Phys. Today, pp 33-39 Feb. (1996).
- [36] Newland, D.E., *Random vibrations and spectral analysis*, 2nd. ed., Longman, 1984.
- [37] Davis, A. et al., *Multifractal Characterizations of Nonstationarity and Intermittency in Geophysical Fields: Observed, Retrieved or Simulated*. J. Geophys. Res., **99**, No. D4, (1994) 8055-8072.

- [38] Davis, A. *et al.*, *Wavelet-based multifractal analysis of Nonstationarity and/or Intermittent geophysical signals* in *Wavelets in Geophysics*, Foufoula-Georgiu, E. and Kumar P. (eds.), Academic Press, (1994) pp. 249-298.
- [39] Greis, N.P., *et al.*, *Implication of a power law power-spectrum for self-affinity*, *Phys. Rev. A*, **44**, No. 4, (1991).
- [40] Monin, A.S., Yaglom, A.M., *Statistical Fluid Mechanics*, M.I.T, Cambridge, MA, 1971, Vol II.
- [41] Muzy, J.F., *et al.*, *Multifractal formalism for fractal signals...*, *Phys. Rev. E*, **47**, No. 2, (1993).
- [42] Marshak, A., *et al.*, *Bounded cascade models as non-stationary multifractals*, *Phys. Rev. E*, **49**, (1994) 55-69.
- [43] Barabasi, A., Vicsek, T., *Multifractality of self-affine fractals*, *Phys. Rev. A*, **44**, 4 (1991) 2730.
- [44] Schertzer, D. and Lovejoy, S., *Nonlinear Variability in Geophysics 3: Scaling and multifractal processes*. Lecture Notes. NVAG3, EGS (1993).
- [45] Schmitt, F., *Turbulence developpe et multifractals universels en soufflerie et dans l'atmosphere*, Ph.D. These, Universite Paris VI (1993).
- [46] Tsallis, C., *Levy distributions*, *Physics World*, July 1997, p. 42.
- [47] Barbosa, A., *Multifractal analysis and probabilistic modelling of rain fields*, *Memoire de Licence*, Universite Libre de Bruxelles (1997).
- [48] Salvadori, G., *Multifrattali Stocastici: Teoria e Applicazioni*, *Tesi di Dottorato*, Universita degli Studi de Pavia (1993).
- [49] Lavallee, D., *Multifractal techniques: Analysis and simulations of turbulent fields*, *Ph.D. Thesis*, University McGill, Montreal, Canada (1991).

- [50] Schertzer, D. *et al.* *Multifractal analysis and simulations of nonlinear geophysical signals and images*, XXII colloque GRETSI, pp 1313-1325.
- [51] J. Wdowczyk, J. Phys. G, **20**, (1994) 1001.
- [52] N.N Kalmykov and G.B. Khristiansen, J. Phys. G, **21**, (1995) 1279.
- [53] B. Wiebel, *Chemical composition in High Energy Cosmic Rays*, BUGH Wuppertal, WUB 94-08, April 1994.
- [54] K. Greisen, Ann. Rev. of Nucl. Sci., **10**, (1960) 63.
- [55] Teshima, M., 23rd ICRC Calgary, Invited, Rapporteur and Highlight Papers, (1993) 257.
- [56] N.L. Grigorov *et al.*, Yad. Fiz., **11**, (1970) 1058.
- [57] K. Asakimori *et al.*, 23rd ICRC Calgary, **2**, (1993) 21.
- [58] M. Ichimura *et al.*, Phys. Rev. D, **48**, (1993) 1949.
- [59] A.M. Hillas, Phys. Rep. **20**, (1975) 59.  
A.M. Hillas, Ann. Rev. Astron. Astroph. **22**, (1984) 425.
- [60] G. Schatz *et al.*, J. Phys. G, **20**, (1994) 1267.
- [61] J.N. Capdevielle *et al.*, KfK Report 4998, Kernforschungszentrum, Karlsruhe (1992).
- [62] K. Werner, Phys. Rep., **232**, (1993) 87.
- [63] N.N Kalmykov and S.S. Ostapchenko, Sov. J. Nucl. Phys., **50**, (1989) 315.  
N.N Kalmykov and S.S. Ostapchenko, Phys. At. Nucl., **56**, (1993) 346.
- [64] M.P. Chantler *et al.*, J. Phys. G, **9**, (1983) L27.
- [65] J. Wdowczyk, *Cosmic Rays at Ground Level*, ed. A.W. Wolfendale (Institute of Physics, London 1993) p.137.  
J. Wdowczyk and A.W. Wolfendale, J. Phys. G, **39**, (1984) 1453.

- [66] G. Khristiansen *et al.*, *Cosmic Rays of Superhigh Energies*, ed. K Thiemig (München Verlag, Munich 1980).
- [67] P. Doll *et al.*, KfK Report 4686, Kernforschungszentrum, Karlsruhe (1990).  
R.A. Ong *et al.*, Nucl. Phys. B, (Proc. Suppl.), **14A**, (1990) 244.
- [68] K.G. Gibbs, Nucl. Instrum. Methods A, **264**, (1988) 67.
- [69] A. Lindner *et al.*, 25th ICRC Durban, (1997) OG 10.3.36.
- [70] K. Kamata, Prog. Theoretical Phys. Suppl., **6**, (1958) 93.
- [71] D.J. Bird *et al.*, 23rd ICRC Calgary, **2**, (1993) 38.
- [72] L.G. Porter and R.O. Stenerson, J. Phys. A, **2**, (1969) 374.  
M.L. Cherry, Phys. Rev. D, **27**, (1983) 1444.  
B.S. Acharya *et al.*, 18th ICRC Bangalore, **2**, (1983) 108.
- [73] C. Berger *et al.*, Phys. Rev. D, **40**, (1989) 2163.  
G. Bologna *et al.*, Nuovo Cim., **8C**, (1985) 76.  
S. Ahlen *et al.*, Phys. Rev. D, **46**, (1992) 895.
- [74] M.S. Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press (1981).
- [75] P. Sokolsky, *Introduction to Ultrahigh Energy Cosmic Ray Physics*, Addison Wesley Redwood City, CA 1989.
- [76] A. M. Hillas. J. Phys. G, **8**, (1982) 1461.
- [77] S. Martínez, tesis doctoral, *Caracterización de Rayos Cósmicos de Muy Alta Energía con el Detector HEGRA mediante Simulación*, Universidad Complutense de Madrid (1996).
- [78] I. P. Ivanenko *et al.*, Proc. 16th ICRC Kyoto, **9**, (1979) 88 and 90.
- [79] R. J. Protheroe and K. E. Turver, Il Nuovo Cimento, **51A**, (1979) 277.
- [80] A. Andam *et al.*, Proc. 16th ICRC Kyoto, **9**, (1979) 48.



- [81] J. D. Kuhlmann *et al.*, Proc. 15th ICRC Plovdiv, **8**, (1977) 239.
- [82] T. J. L. McComb and K. E. Turver, Il Nuovo Cimento, **5C** (1982) 131.
- [83] J. R. Patterson and A. M. Hillas, J. Phys. G, **9** (1983) 1433.
- [84] H. O. Klages, Nucl. Phys., **52B** (1997) 92.
- [85] D. J. van der Walt, J. Phys. G, **14**, 105 (1988).
- [86] A. A. Lagutin, A. V. Pljasheshnikov and V. V. Uchaikin, 16th ICRC Kyoto, (1979) HE 4-4.
- [87] W. R. Nelson *et al.*, SLAC Report, 265 (1995).
- [88] A. Capella and J. T. T. Van, Phys. Lett. B, **93**, (1980) 146.
- [89] J. Knapp *et al.*, KfK report FZKA, 5828 (1996).
- [90] P. F. K. Grieder, Proc. 16th ICRC Kyoto, **9**, (1979) 161.
- [91] H. Fesefeldt, *The simulation of Hadron Showers*, RWTH Aachen Report PITHA, 85/02 (1985).
- [92] S. Martínez *et al.*, NIM A, **357** (1995) 567.
- [93] Portocarrero, C.E., Arqueros, F., *On the Cherenkov light produced at several observatory altitudes by extensive air showers in the energy range 0.01-10 TeV*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., **24**, (1998) 235-253.
- [94] Takagi, F., *Power-spectrum analysis of fluctuations of pseudorapidity distributions in nucleus-nucleus collisions at very high energies*, Phys. Rev. Lett. **53**, No. 5, (1984).
- [95] Faleiro, E., Gómez, J.M.G., Fonseca, V., *Power spectrum analysis and multifractal study of fluctuations of secondary particles in monte carlo simulation of E.A.S.* Proc. XXV ICRC Conference, Durban, Vol.5, 261-264 (1997).

- [96] Faleiro, E. and Gómez, J.M.G., *A study of fluctuations in simulated extensive air showers*. Proceedings of the Interdisciplinary Conference: Fractal 98, en prensa.
- [97] Sinha, S., *On the fluctuations of Cerenkov photon densities in very high-energy gamma ray showers*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **21**, (1995) 473-486.
- [98] Kempa, J., *Fractal and factorial studies of electron density distributions in extensive air showers*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **20**, (1994) 215-222.
- [99] Cortina, J., *Medida del espectro y la composicion quimica de los rayos cosmicos en el rango de 300 TeV a 30 PeV*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid (1997).
- [100] Schmitt, F., *et al.*, *Multifractal analysis of the Greenland ice-core project climate data*, Geophys. Res. Lett., **22**, No. 13, (1995) 1689-1692.
- [101] Schmitt, F., *et al.*, *Empirical study of multifractal phase transitions in atmospheric turbulence*, Nonlinear Processes in Geophysics (1994) 95-104.
- [102] Schmitt, F., *et al.*, *Empirical determination of universal multifractal exponents in turbulent velocity fields*, Phys. Rev. Lett., **68**, No. 3, (1992).
- [103] Schmitt, F., *et al.*, *Multifractal properties of temperature fluctuations in turbulence*, Proc. CFIC Conference (1996). Springer.
- [104] Arena, V., *et al.*, *Semi-inclusive analysis of multiparticle production in h-h collisions at  $\sqrt{s} = 16.7$  GeV in terms of universal Multifractals*, Il Nuovo Cimento, **108A**, No. 4, (1995).
- [105] Ratti, S.P., *et al.*, *Universal multifractal approach to intermittency in high energy physics*, Z. Phys. C **61**, (1994) 229-237.
- [106] Redner, S., *Random Multiplicative Processes: An elementary tutorial*, Am. J. Phys., **58**, 3 (1990).

- [107] Paladin, G., and Vulpiani, A., *Anomalous scaling laws in multifractal objects*, Phys. Reports **156**, No.4 (1987) 147-225.
- [108] Faleiro, E. and Gómez, J.M.G., *Multifractal characterisation of fluctuations in simulated extensive air showers*, Europhys. Lett., en revisión.
- [109] Faleiro, E. and Contreras, J.L. *A study of fluctuations in extensive air showers simulated by Monte Carlo methods*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **24**, No.9 (1998) 1795-1804 .
- [110] Chambers, J.M., *et al.*, *A method for simulating stable random variables*, J. Am. St. Ass. **71**, No. 354, (1976) 340.
- [111] Pecknold, S., *et al.*, *The simulation of universal multifractals*, in Cellular automata: prospect in Astronomy and Astrophysics, World Scientific, Perchang and Lejeune eds. 1993.
- [112] Wilson, J., *et al.*, *Continuous multiplicative cascade models of rain and clouds*, Non-Linear Variability in Geophysics, Schertzer, D. and Lovejoy eds. (Kluwer, Holland, 1991) p. 185.



# Publicaciones

Este trabajo ha dado lugar a las siguientes publicaciones:

## Artículos en revistas:

- E. Faleiro and J.L. Contreras, *A study of fluctuations in extensive air showers simulated by Monte Carlo methods*, publicado en J. Phys. G, **24** (1998) 1795-1804.
- E. Faleiro and J.M.G. Gómez, *Multifractal characterisation of fluctuations in simulated extensive air showers*, enviado para su publicación a Europhys. Lett. y actualmente en proceso de revisión.

## Contribuciones a congresos:

- E. Faleiro and J.M.G. Gómez, *A study of fluctuations in simulated extensive air showers*. Paper aceptado para su publicación en los Proceedings of the 5th International Multidisciplinary Conference Fractal 98, 25-28 October 1998.
- E. Faleiro, J.M.G. Gómez and V. Fonseca, *Power spectrum analysis and multifractal study of fluctuations of secondary particles in Monte Carlo simulation of EAS*, publicado en los Proceedings 25th International Cosmic Ray Conference, Durban, (1997) 261-264.

Además el autor ha tomado parte en las siguientes publicaciones como miembro de la Colaboración Española del Experimento HEGRA:

## Artículos en revistas:

- A. Karle... E. Faleiro et al, *A search for gamma radiation above 24 TeV energy from cosmic point sources*, Astrop. Phys., **4**, (1995) 1-13.

- M. Merck... E. Faleiro et al, *Methods to determine the angular resolution of the HEGRA extended air shower scintillator array*, Astrop. Phys., 5, (1996) 379-392.

### **Contribuciones a congresos:**

Como miembro de la Colaboración Española del Experimento HEGRA, el autor es firmante de cuantas comunicaciones a congresos y reuniones científicas se hayan enviado bajo la firma de la citada Colaboración.

### **Participación en congresos:**

- XXth International Meeting on Fundamental Physics: Astroparticle Physics. Tenerife 1992.
- International Conference on Chaos and Fractals Models, Pavia (Italia) 1996.
- XXV International Cosmic Ray Conference (ICRC), Durban (Sudáfrica) 1997.
- XXIII General Assembly of European Geophysical Society, Nice (Francia) 1998.
- FRACTAL 98, *Complexity and Fractals in the Science*, 5th International Multidisciplinary Conference. Valletta (Malta) 1988.

# Índice de materias

- análisis
  - cercano, 82
  - lejano, 82
- autoafinidad, 34
- autosimilaridad, 6
  - estadística, 31
- cascada
  - canónica, 48
  - media, 77
  - multiplicativa, 25
- codimensión
  - dual, 44
  - fractal, 49
  - función de, 50
  - media, 51
- CORSIKA, 63
- derivación fraccional, 46
- dimensión
  - de autosemejanza, 15
  - de correlación, 23
  - de Hausdorff, 10
  - de información, 22
  - de muestreo, 53
  - de recuento por cajas, 10
  - de Renyi, 22
  - de una medida, 9
  - fractal, 10
  - local, 20
- distribución
  - estable de Levy, 159
  - gaussiana, 158
  - infinitamente divisible, 159
  - paralela, 25
- divergencia de los momentos, 52
- DTM, 55, 130
- EAS, 59
  - electromagnéticas, 65
  - hadrónicas, 67
- escalamiento, 5
  - de la autocorrelación, 23, 51
  - de la PSD, 46
  - de los momentos, 22, 41, 50
  - invariancia de, 33
- exponente
  - $K(q)$ , 43, 116
    - en análisis cercano, 128
    - en análisis lejano, 117
  - $\zeta(q)$ , 39
  - de Holder, 20
  - de Hurst, 35
  - de no estacionaridad, 46, 101
  - de singularidad, 20
  - H, 40
- factor de calidad Q, 140
- FFT, 38
- filtro, 92, 98, 104, 107
  - intrínseco, 92, 166
- filtro global, 146, 147
  - de fotones, 150
  - de protones, 149
  - universal, 148
- fractal, 6
- fractales
  - deterministas, 12

- estocásticos, 26
- funciones, 17
- regulares, 13
- ruidos, 18
- función
  - de estructura, 39
  - característica, 157
  - de autocorrelación, 37, 41
  - de estructura, 41
  - de partición, 22
  - de transferencia, 92
- IFS, 17
- integración
  - fraccional, 40
- intermitencia, 44, 45, 47
  - parámetro de, 45
- Levy
  - índice de, 54, 57
  - ruido de, 41
  - variable de, 41, 54
  - vuelo de, 41
- librería de sucesos simulados, 83
- medidas
  - desnudas, 52
  - vestidas, 52
- Mellin
  - transformada de, 47
- modelo
  - $\alpha$ , 49
  - $\beta$ , 48
  - binomial, 25
  - de regresión, 29, 86
  - para la PSD, 92
- movimiento
  - browniano, 31
  - fraccional, 35
- multifractal, 5
  - determinista, 18, 25
  - espectro, 20, 22, 24, 50
  - estocástico, 41, 47
  - medida, 21
  - universal, 53, 58, 161
- NKG, 66
- parámetro  $\chi_r^2$ , 141
- paseo aleatorio, 32
- proceso
  - aditivo, 32, 40
  - de degradación, 117
  - de incrementos estacionarios, 39
  - DLA, 19
  - estacionario, 37
  - estocástico, 28, 29, 165
  - iterativo, 12
  - multiplicativo, 25, 47, 157
  - WSS, 38
- PSD, 37, 38
- radiación cósmica, 59
  - composición química, 62
- ruido
  - $1/f$ , 30, 101, 107
  - blanco, 29, 40
  - browniano, 30
  - de Levy, 41
  - fractal, 29
  - marrón, 30
  - mBf, 40
- separación  $\gamma$ /protón, 139
- Sierpinsky, 7
- simulación
  - continua, 162
  - discreta, 161
- singularidad, 20
  - orden de la, 50
- Von Koch, 7
- Weierstrass, curva de, 5